Trasformazioni nel piano cartesiano

classi 3C-3D, dicembre 2011

1 Simmetria assiale rispetto all'asse y

La trasformazine di un punto (x, y) nel suo trasformato (x', y') si pu scrivere come

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & -x \\ y' = & y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} x' = & -1 \cdot x + & 0 \cdot y \\ y' = & 0 \cdot x + & 1 \cdot y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tag{1}$$

e quindi riscrivendo il tutto in forma matriciale si ha

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

2 Simmetria assiale rispetto all'asse x

La trasformazine di un punto (x, y) nel suo trasformato (x', y') si pu scrivere come

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x \\ y' = & -y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} x' = & 1 \cdot x + & 0 \cdot y \\ y' = & 0 \cdot x - & 1 \cdot y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tag{3}$$

e quindi riscrivendo il tutto in forma matriciale si ha

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

3 Simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante

La trasformazine di un punto (x, y) nel suo trasformato (x', y') si pu scrivere come

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & y \\ y' = & x \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} x' = & 0 \cdot x + & 1 \cdot y \\ y' = & 1 \cdot x + & 0 \cdot y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tag{5}$$

e quindi riscrivendo il tutto in forma matriciale si ha

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6}$$

4 Simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante

La trasformazine di un punto (x, y) nel suo trasformato (x', y') si pu scrivere come

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & y \\ y' = & x \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} x' = & 0 \cdot x + & 1 \cdot y \\ y' = & 1 \cdot x + & 0 \cdot y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tag{7}$$

e quindi riscrivendo il tutto in forma matriciale si ha

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{8}$$

5 Traslazione

La traslazione di un vettore (v_x, v_y) di un punto (x, y) nel suo trasformato (x', y') si pu scrivere come

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x + v_x \\ y' = & y + v_y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} x' = & 1 \cdot x + & 0 \cdot y + v_x \\ y' = & 0 \cdot x + & 1 \cdot y + v_y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tag{9}$$

e quindi riscrivendo il tutto in forma matriciale si ha

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{10}$$

6 rotazione di un angolo α attorno all'origine

La rotazione di un angolo α di un punto (x, y) nel suo trasformato (x', y') si pu scrivere come

$$\left\{\begin{array}{lll} x' = & \cos(\alpha)x & -\sin(\alpha)y \\ y' = & \sin(\alpha)x & +\cos(\alpha)y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} x' = & \cos(\alpha) \cdot x & -\sin(\alpha) \cdot y \\ y' = & \sin(\alpha) \cdot x & +\cos(\alpha) \cdot y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tag{11}$$

e quindi riscrivendo il tutto in forma matriciale si ha

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{12}$$

7 Simmetria assiale rispetto all'asse y

La trasformazine di un punto (x, y) nel suo trasformato (x', y') si pu scrivere come

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & -x \\ y' = & y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} x' = & -1 \cdot x + & 0 \cdot y \\ y' = & 0 \cdot x + & 1 \cdot y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tag{13}$$

e quindi riscrivendo il tutto in forma matriciale si ha

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{14}$$

8 Omotetia con centro nell'origine

L'omotetia di fattore k con centro nell'origine[1] di un punto (x, y) nel suo trasformato (x', y') si pu scrivere come

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & kx \\ y' = & ky \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} x' = & k \cdot x + & 0 \cdot y \\ y' = & 0 \cdot x + & k \cdot y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tag{15}$$

e quindi riscrivendo il tutto in forma matriciale si ha

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{16}$$

[1] in parole povere, l'ingrandimento se $|k| > 1$ o il rimpicciolimento se $|k| < 1$

9 Generalizzazioni

E se vogliamo applicare un'omotetia centrata in un punto P differente dall'origine O? Possiamo traslare tutto di un vettore v in modo che P arrvivi in $P' = O$. Qui siamo in grado di applicare l'omotetia, e dopo averla applicata ritrasliamo tutto indietro di un vettore $-v$.

Ananlogo discorso se vogliamo applicare una simmetria assiale rispetto ad un asse diverso dagli assi cartesiani.

Più in generale possiamo dire che siamo in grado di descrivere una qualsiasi trasformazione affine con la generica trasformazione seguente:

$$\begin{cases} x' = & ax + by + v_x \\ y' = & cx + dy + v_y \end{cases} \qquad \Rightarrow \tag{17}$$

che riscritta in forma matriciale diventa

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{18}$$

Con l'equazione (18) possiamo quindi descrivere tutte le trasformazioni precedentemente viste, assegnando ai coefficienti a, b, c, d e vx, vy gli opportuni valori.

10 Esercizi in c++

Scivere un programma che, definita una figura di partenza (es: uno o pi segmenti, i relativi assi...) ne disegni la trasformata usando le trasformazioni elencate di seguito. Ricordo la possibilit di disegnare delle figure statiche, oppure di applicare pi volte la trasformazione mediante l'utilizzo di un timer, in modo tale da realizzare una sorta di animazione.

1. Traslazione di un vettore $(1, -1)$.
2. Rotazione di un angolo $\alpha = \pi/8 rad$ attorno all'origine.
3. Zoom di un fattore $k = 2$ centrato nell'origine.
4. Simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo terzo quadrante.
5. Zoom-out di un fattore $k = 1/2$ centrato nel punto $P = (5, 3)$. (Dovrai traslare tutto di un vettore $v = (-5, -3)$. In questo modo $P' = (0, 0)$, sai applicare l'opportuna omotetia, quindi trasli nuovamente tutto di un vettore $-v = (5, 3)$).
6. Rotazione di un angolo $\alpha = -\pi/6$ centrato nel punto $P = (-2, 3)$. (Dovrai traslare tutto di un vettore $v = (2, -3)$. In questo modo $P' = (0, 0)$, sai applicare la rotazione, quindi trasli nuovamente tutto di un vettore $-v = (-2, 3)$).

11 Note tecniche c++ e liberie Qt

Esempi e documentazione riguardanti l'uso delle funzioni di nostro interesse puoi trovarle ai seguenti link
`http://doc.qt.nokia.com/4.7/examples-painting.html`
`http://doc.qt.nokia.com/4.7/qpainter.html`

Nel nostro caso ci occuperemo semplicemente della funzione
`void myCartesiano::paintEvent(QPaintEvent *)`
contenuta nel file `mycartesiano.cpp` che si occupa di definire e disegnare i nostri oggetti geometrici.

Di seguito le istruzioni per disegnare:

- un segmento a dal punto A=(2,3) al punto B=(5,6):
```
QLineF a(2.,3.,5.,6.);
painter.drawLine(a);
```
- un punto P di coordinate (2,3)
```
QPointF P(2.,3.);
painter.drawPoint(P);
```
- una polilinea (insieme di segmenti) formata da 100 punti che rappresenta la funzione $\sin(x)$ (i 100 punti avranno quindi coordinate $(x, \sin(x))$):
```
int np=100;
QPointF points[np];
float x,dh=0.1,x0=0;
for(int i=0; i<np; i++){
     x=x0+dh*i;
    points[i] = QPointF(x,sin(x));
}
painter.drawPolyline(points, np);
```
- un rettangolo R con vertice (x,y), di base b e altezza h:
```
QRectF R(x,y,b,b);
painter.drawRect(R);
```
- un ellisse C inscritto al precedente rettangolo:
```
painter.drawEllipse(R);
```