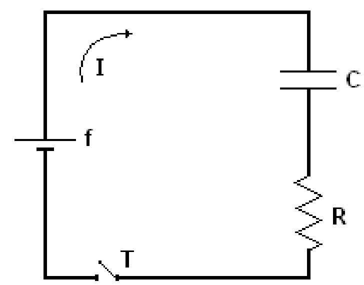
Classe 4 c

ESERCIZI

(con valutazione, uno a scelta fra i primi due più uno a scelta fra il III° ed il IV°)

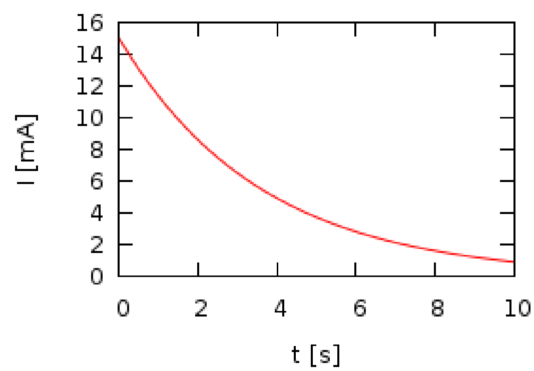
1. Carica di un condensatore



In un circuito abbiamo una batteria con voltaggio **V_0 9V** (indicata con **f** nel disegno a fianco), un condensatore **C** da **6mF** ed una resistenza **R** da **600 Ω.**

Chiudendo l'interruttore all'istante t=0, sappiamo che la corrente che circola durante la carica del condensatore è descritta dalla legge
$I=\frac{V_0}{R}\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$,grossomodo come la curva rappresentata in figura.

Sei in grado di calcolare la carica elettrica Q accumulata sul condensatore dopo 4 secondi?



(Suggerimento: la carica elettrica accumulata in un piccolo istante dt in cui si possa considerare quasi costante la corrente, sarà data dal prodotto di dt per la corrente I. In altre parole la carica accumulata sarà semplicemente l'area al di sotto della funzione I(t). Pertanto dovrai calcolare l'area sotto il grafico di I da 0 a 4 secondi.)

(Soluzione: 36.2 mC)

A titolo informativo, si potrebbe anche dimostrare che la carica in funzione del tempo può essere descritta dalla formula analitica

$$Q=C V_0\left(1-\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)\right)$$

2. Caduta di un paracadutista

Un paracadutista si lancia da un aereo. Il suo moto non si può approssimare direttamente con un moto uniformemente accelerato, dato che l'attrito viscoso complica il problema in modo non indifferente. Possiamo dire che la forza di attrito risulta essere direttamente proporzionale alla velocità assunta dal paracadutista, limitando drasticamente la sua accelerazione. Quando il personaggio in questione apre il paracadute, tale coefficiente di attrito cresce notevolmente e, per fortuna sua, rallenta notevolmente la velocità di caduta. Dovendo simulare il fenomeno in un videogioco, schematizziamo così il problema: una persona di massa **m=80kg** soggetta alla forza

peso, con **g=9.8 m/s²**, si lancia con velocità iniziale nulla. La forza di attrito sarà pari a **F_A=k v**, dove k è una costante che vale **k_1=10 kg/s** senza paracadute e **k_2=100 kg/s** con il paracadute.
Per i più volonterosi si potrebbe quindi risolvere il problema in questo modo: calcolare ogni un certo **dt** sufficientemente piccolo (es: **dt=0.1 s**) l'accelerazione e la velocità, quindi lo spazio percorso, e proseguire passo passo. Sappiamo che, istante per istante, vale la seconda legge della dinamica. Quindi

$a = F_{TOT}/m$.

La F_{TOT} sarà data dalla somma della forza peso più la forza d'attrito, ovvero

$a = (F_{TOT} - F_A)/m = g - k\, v /m$

Attenzione però che la velocità va calcolata istante per istante: partendo da principio dove la velocità è nulla, sappiamo che l'accelerazione **a** è semplicemente **g**. Quindi dopo un tempo **dt** abbiamo che la velocità è semplicemente v=a * dt. Ora la velocità non è più nulla. Dobbiamo ricalcolare le forze in gioco, tenendo conto della forza d'attrito. Troviamo quindi che la nuova velocità sarà data da $v = a * dt + v_{precedente}$ dove a viene calcolata come **$a = g - k\, v_{precedente} /m$.** E così via....
Quando si apre il paracadute dovremo cambiare il valore di **k** e procedere in modo analogo.

Sapendo che dopo **50s** di volo viene aperto il paracadute, e che dopo altri **10s** tocca il suolo, riesci a calcolare l'altezza da cui si è lanciato?

Per risolvere il quesito ricordo che lo spazio percorso non è altro che l'area al di sotto del grafico della velocità-tempo.

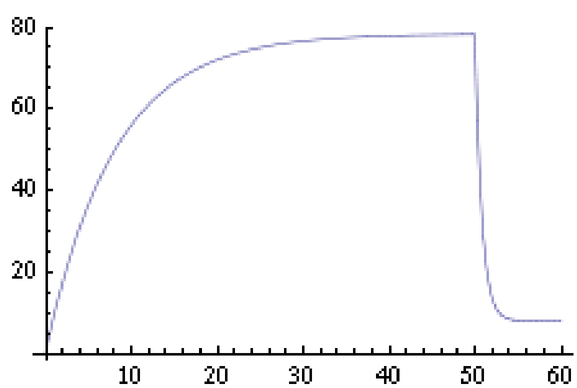
Se vuoi puoi calcolarti la velocità per ogni tempo col metodo sopra esposto. In caso contrario sai che per i primi 50 secondi (ovvero per t<50) la velocità è pari a

$$v(t) = \frac{g\,m}{k_1}\left(1 - \exp\left(\frac{-k_1 t}{m}\right)\right)$$

e dopo l'apertura del paracadute (per t>50) sarà invece data da

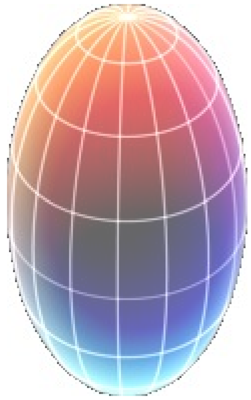
$$v(t) = \frac{g\,m}{k_2}\left[1 + \left(\frac{k_2}{k1} - \exp\left(\frac{-k_2(t-50\text{s})}{m}\right)\right)\right]$$

e quindi calcolerai l'area al di sotto della velocità da 0 a 60 secondi per calcolare lo spazio percorso.



(Soluzione: 3294 m prima di aprire il paracadute, altri 135 m dopo, per un totale di 3429 m percorsi).

3. Volume di uno sferoide



Considera il seguente sferoide in tre dimensioni, i cui punti interni soddisfano la disequazione

$$x^2 + y^2 + (2z)^2 < 1$$

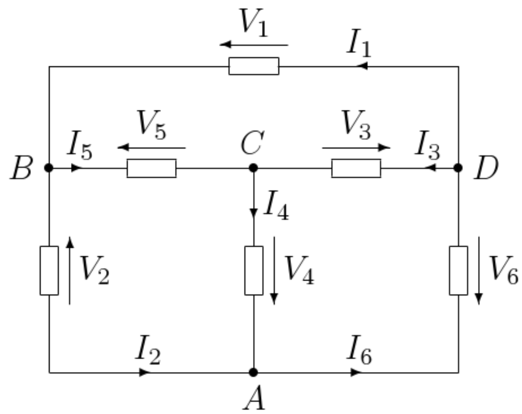
Campionando dei punti uniformemente distribuiti in un parallelepipedo di base 2x2, centrato nell'origine, con altezza 4, stima con una buona approssimazione il volume di tale sferoide

(Soluzione: 8.378).

4. Circuito

L'altro giorno si è bruciato il tuo stereo in camera. Con molta pazienza lo smonti e trovi un piccolo circuito che sa odore di bruciato. Trovata una copia dello schema del circuito e volendo trovare il pezzo da cambiare, misuri con un tester alcune correnti e differenze di potenziali per confrontare poi i dati misurati con quelli riportati nel manuale. Ottieni le seguenti misure, che sono però incomplete.

$V_4 = 7$ V, $V_5 = 9$ V, $V_6 = 8$ V, $I_3 = 6$ A, $I_5 = 8$ A $I_6 = 7$ A



Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni (la somma di tutte le tensioni percorrendo una maglia deve essere nulla) rispettivamente alla maglia di sinistra, alla maglia di destra ed alla maglia esterna si ottengono le seguenti equazioni

$V_2 + V_4 - V_5 = 0$

$V_3 + V_6 - V_4 = 0$

$V_2 + V_6 - V_1 = 0$

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti (la somma delle correnti entranti ed uscenti da un nodo deve essere nulla) rispettivamente ai nodi B, C e D si ottiene

$I_5 + I_3 - I_4 = 0$

$I_6 + I_5 - I_1 = 0$

$I_2 - I_1 + I_5 = 0$

Impostati i due sistemi lineari, scrivi un programma che li risolva con il metodo di Gauss. In questo modo potrai scoprire il valore degli altri dati che non sei riuscito a misurare, e riuscirai a scovare il problema del tuo stereo.....

(Soluzione: $I_4 = 14$A , $I_1 = 1$A, $I_2 = -7$A, $V_2 = 2$V, $V_3 = -1$V, $V_1 = 10$V)