Spunti per la correzione della verifica di gennaio

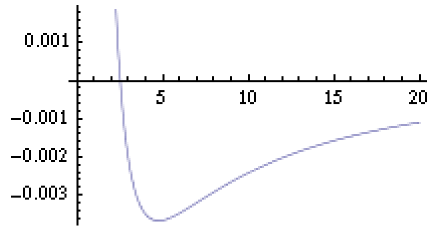
ES 1

Testo

1. Con uno dei metodi a te noti (quello della tangente o uno dei due metodi della secante),
   - determinare numericamente la soluzione positiva dell'equazione

     $$f(x)=\frac{1}{(x+1)^4}-\frac{1}{(x+10)^2}=0$$

     con un'accuratezza assoluta di ε = 0.3 partendo dagli estremi **2** e **3**.
   - spiegare al contempo i dettagli del funzionamento dell'algoritmo.
   - illustra (senza implementarlo e calcolarlo) come potresti modificare l'algoritmo per trovare un minimo (o massimo) relativo della funzione f(x).



Soluzione

A) Metodo della secante con 1 punto fisso

1. $x_A=2$; $x=3$
2. calcolo il coefficiente angolare della retta **r** che passa per i punti $(x_A,f(A))$ e $(x,f(x))$, ovvero: $m=\frac{f(x_A)-f(x)}{x_A-x}$ nonché il suo coefficiente angolare $q=f(x_A)-m\,x_A$.
3. Calcolo l'ascissa dell'intersezione della retta **r** con l'asse x: $x'=\frac{-q}{m}$.
4. Se $|x'-x|<\varepsilon$ ho raggiunto la risoluzione voluta, altrimenti pongo x=x' e torno al punto 2 .

Riporto le prime 3 iterazioni. Alla seconda si raggiungeva l'accuratezza voluta.

f(x)	x	m	q	x'	|x'-x|	Num iterazione
0,0054012346	**2**					
-0,002010910	**3**	-0,007412144	0,0202255232	2,7287006737		1
-0,000998758	2,7287006737	-0,008782745	0,0229667243	2,6149825201	0,1137181536	2
-0,000428212	2,6149825201	-0,009479044	0,0243593222	2,5698079555	0,0451745646	3

B) Metodo della secante senza punti fissi

1. $x_1=3$; $x_2=2$
2. calcolo il coefficiente angolare della retta **r** che passa per i punti $(x_1,f(x_1))$ e $(x_2,f(x_2))$, ovvero: $m=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ nonché il suo coefficiente angolare $q=f(x_1)-m\,x_1$.
3. Calcolo l'ascissa dell'intersezione della retta **r** con l'asse x $x_3=\frac{-q}{m}$.

4. Se $|x_2 - x_3| < \varepsilon$ ho raggiunto la risoluzione voluta, altrimenti pongo $x_1=x_2$ e $x_2=x_3$ torno al punto 2 .

Riporto le prime 3 iterazioni. Alla seconda si raggiungeva l'accuratezza voluta.

f(x)	x	m	q	x'	|x'-x|	Num iterazione
-0,002010910	**3**					
0,0054012346	**2**	-0,007412144	0,0202255232	2,7287006737	2,7287006737	1
-0,000998758	2,7287006737	-0,008782745	0,0229667243	2,6149825201	0,1137181536	2
-0,000428212	2,6149825201	-0,005017192	0,0126916587	2,5296336547	0,0853488654	3

C) Metodo della tangente

1. x=2
2. calcolo la derivata m=f'(x) (numericamente oppure analiticamente) della funzione f(x) nel punto x.
3. Calcolo il coefficiente angolare della tangente **t** alla funzione f(x) nel punto x: $q=f(x)-m(x)x$
4. Calcolo l'ascissa dell'intersezione della retta **t** con l'asse x $x' = \frac{-q}{m}$.
5. Se $|x' - x| < \varepsilon$ ho raggiunto la risoluzione voluta, altrimenti pongo x=x' torno al punto 2 .

Riporto le prime 3 iterazioni. Alla seconda si raggiungeva l'accuratezza voluta.

f(x)	x	m	q	x'	|x'-x|	Num iterazione
-0,002010910	**3**	-0,002995918	0,0069768434	2,3287833828		
0,0015653819	2,3287833828	-0,008719353	0,0218708663	2,5083129711	0,1795295883	1
0,0002094577	2,5083129711	-0,006504112	0,0165238058	2,5405168529	0,0322038818	2
0,0000053348	2,5405168529	-0,006175856	0,0156952018	2,5413806659	0,0008638130	3

Per quanto riguarda il calcolo dei massimi e minimi basta applicare uno dei tre precedenti algoritmi alla derivata prima f'(x) anziché alla funzione stessa f(x). I massimi verranno distinti dai minimi in base al segno della derivata seconda.

ES 2

Testo

2. Dei seguenti due sistemi, si individui quello determinato e lo si risolva sia con Cramer che con il metodo della matrice inversa (a mano, con tutti i passaggi!!). Di quello non determinato si chiarisca la natura scrivendone tutte le soluzioni nel caso il cui sia indeterminato oppure dichiarandone l'impossibilità.

   - $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ x+2y-2z=6 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+z=10 \\ 2x=9+y \end{cases}$

   Usando i due metodi sopra menzionati spiega da cosa ti indica se stai tentando di risolvere un sistema impossibile o indeterminato.

Soluzione

Calcolo il determinante delle due matrici relative ai due sistemi (col metodo desiderato: Sarrus o il metodo dei minori). Per il primo sistema trovo Det=10. Per il secondo trovo Det=0 ed il sistema sarà quindi indeterminato oppure impossibile.

Risolvendo il primo sistema con Cramer calcolo il determinante delle 4 matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad Ay = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad Az = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ottenendo rispettivamente 10, 32, -4, -18.
Quindi otteniamo le soluzioni

$$y = \frac{Det\ Ay}{Det\ A} = \frac{-2}{5} \qquad z = \frac{Det\ Az}{Det\ A} = \frac{-9}{5}$$

Se voglio risolverlo col metodo della matrice inversa, per determinare il vettore (x,y,z) devo calcolare la matrice inversa di A:

$$\overset{\text{Matrice A}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} . \overset{\text{Matrice A}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Innanzitutto calcolo la matrice dei cofattori, ovvero quella matrice C dove l'elemento $c_{i,j}$ vale: $c_{i,j} = (-1)^{i+j} Det\left(Minor_{i,j}(A)\right)$ dove $Minor_{i,j}(A)$ è la solita matrice minore, ovvero la matrice A tolta la riga i e la colonna j.

La matrice C risulta essere:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

L'inversa di risulta essere semplicemente la trasposta di C divisa per il determinante di A, e pertanto risulta essere

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} C^T = \frac{1}{10} * \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

E quindi si trova la soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

Per il secondo sistema non si può usare il metodo della matrice inversa visto che il determinante di A risulta nullo. Col metodo di Cramer si potrebbero calcolare i determinanti di Ax, Ay e Az per accertarci che non siano zero: in questo caso il sistema risulterebbe indeterminato (se sono tutti 0), in caso contrario (se almeno uno è diverso da 0) il sistema risulta impossibile. In questo caso risultano tutti nulli ed il sistema risulta quindi essere indeterminato.

Col metodo di sostituzione o di Gauss si possono trovare le soluzioni:
$x=\frac{10-z}{3}$ e $y=-\frac{7+2z}{3}$.

ES 3

Testo

3. Con uno dei due metodi precedenti risolvere il seguente sistema parametrico. Fare l'opportuna discussione riguardo alla natura del sistema in funzione al valore assunto dal parametro a.

$$\begin{cases} x+y+az=a \\ x+2y+3z=0 \\ x+y=2a+1 \end{cases}$$

Soluzione

Con il metodo di Cramer si trova che i determinanti delle seguenti matrici

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Ax=\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 0 & 2 & 3 \\ 2a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Ay=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2a+1 & 0 \end{pmatrix} \quad Az=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente $-a,\ 3+a-4a^2,\ -3-2a+2a^2,\ 1+a\cdot$

Le soluzioni risultano pertanto essere $x=\frac{4a^2-a-3}{a},\ y=\frac{3+2a-2a^2}{a},\ z=-\frac{1+a}{a}$.
Il sistema risulterà pertanto determinato per $a\neq 0$ ed impossibile per $a=0$.

Alla stessa soluzione si arriva con il metodo della matrice inversa, dove otterremo la matrice dei cofattori

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ a & -a & 0 \\ 3-2a & -3+a & 1 \end{pmatrix}$$

quindi l'inversa di A

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{a} & -1 & -\frac{3-2a}{a} \\ -\frac{3}{a} & 1 & -\frac{-3+a}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

e le soluzioni precedentemente riportate.