Trasformazioni geometriche del piano

Liceo *B.Russell* a.s. 2011/12

Claretta Carrara

Indice

Capitolo 1. Introduzione 1
Confronto tra figure 1
Coordinate 2
Costruzioni con riga e compasso con le coordinate 4

Capitolo 2. Isometrie: definizioni 7

Capitolo 3. Isometrie: punto di vista geometrico 11

Capitolo 4. Isometrie: lavorando con le coordinate 15

Capitolo 5. Alcuni approfondimenti 21

Capitolo 6. Affinità 25

Capitolo 7. Esercizi 29

Capitolo 8. Schede di lavoro con GeoGebra 35

Avvertenze.

- Il Capitolo 1 può essere completamente tralasciato nell'ottica di studiare le trasformazioni.
- I Capitoli 2, 3 e 8 possono essere utilizzati anche al biennio o nei corsi in cui le trasformazioni non vengono approfondite.
- Alcune cose sono ripetute, in particolare nei Capitoli 3 e 4, perché tali capitoli sono sostanzialmente indipendenti.
- Parte delle note sono prese da:
  - Courant e Robbins: *Che cos'è la matematica* - Bollati Boringhieri,
  - Alessandro Perotti (Università degli studi di Trento): *Note per il corso di Geometria elementare*,
  - Preziosi suggerimenti della Professoressa Francesca Arrigoni.

CAPITOLO 1

Introduzione

Confronto tra figure

Il termine **uguali**, attualmente tradotto in **congruenti** si basa sul concetto di uguali in aspetto fisico, cioè di **sovrapponibilità**. Il movimento rigido che permette di considerare la sovrapponibiltà è dato da Euclide come concetto intuitivo e primitivo. Solamente nella riformulazione di Hilbert verranno introdotti degli assiomi per spiegare il movimento rigido.

Euclide utilizza però il termine uguale anche per indicare figure **equivalenti**, cioè **equiscomponibili** in figure tra esse congruenti. Una volta introdotta l'idea di misura, due figure sono equivalenti se hanno la stessa area. Questa ambiguità ha spinto ad utilizzare i due termini congruenti e equivalenti per distinguere le due situazioni, abolendo in sostanza dalla geometria il termine uguali.

Il concetto di equivalenza ha permesso di introdurre, nell'attuale formulazione algebrica, le varie formule per calcolare l'area dei poligoni. Ad esempio: un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo con stessa base ed altezza (cioè tali rettangolo e parallelogramma sono costruibili con un certo numero di figure tra loro congruenti). Questo ha portato alla formula dell'area del parallelogramma: $\mathcal{A} = b \cdot h$. Analogamente per la formula dell'area del triangolo: un triangolo è equivalente ad un rettangolo con stessa altezza e base metà della base del triangolo, di conseguenza la formula dell'area di un triangolo è $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.

I famosi teoremi di Pitagora e di Euclide nascono con una formulazione puramente basata sulla geometria e sull'equivalenza, mentre sono attualmente automaticamente tradotti in una formulazione algebrica. Il teorema di Pitagora, in particolare, è ampiamente studiato dal punto di vista algebrico con la ricerca di terne di numeri interi, detti *terne pitagoriche*, che soddisfano l'uguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$; la generalizzazione di tale problema ha dato luce al famoso *Ultimo teorema di Fermat* di natura strettamente algebrica: *l'equazione $a^n + b^n = c^n$ non ammette soluzioni intere positive per $n > 2$.* Tale teorema, congetturato da Fermat (1601-1665), è stato dimostrato solo recentemente (Andrew Wiles, tra il 1993 e il 1998).

E per quanto riguarda la **similitudine**? Come si può definire in maniera corretta e formale la similitudine?

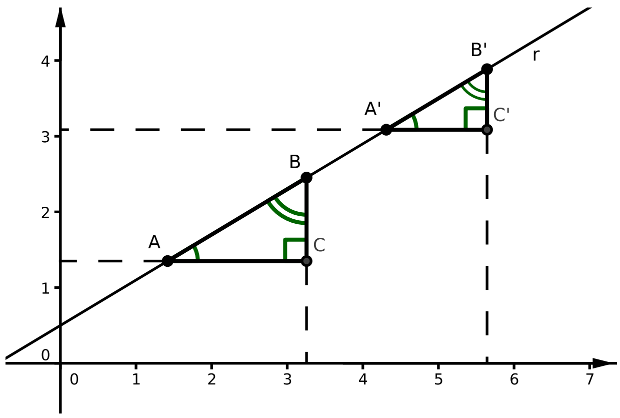
Coordinate

Intorno al 1630, Pierre de Fermat e René Descartes (Cartesio) scoprono, indipendentemente, i vantaggi dell'uso dei numeri nella geometria, introducendo il concetto di coordinate di un punto.

A quei tempi si pensava ancora che l'unica geometria fosse quella Euclidea: i numeri erano solo un aiuto nello studio delle figure geometriche (euclidee). Solo quando nel 1800 si svilupparono le geometrie non euclidee, si cominciò a ragionare in direzione opposta: punti, rette, lunghezze ecc. potevano essere definite mediante numeri per poi dimostrare che tali oggetti soddisfacevano i postulati della geometria euclidea. Questo è anche stato di aiuto per definire con il massimo rigore il concetto di movimento.

Introdotto nel piano un sistema di riferimento ortogonale e monometrico, è possibile associare ad ogni punto del piano una coppia di numeri nel modo noto: a un punto P associamo la coppia di numeri reali (x_P, y_P) tracciando per P le parallele alle due rette che formano il sistema di riferimento e considerando i punti H e K di intersezione tra le parallele tracciate e le rette del sistema di riferimento. A tali punti corrispondono due numeri x_P e y_P (coordinate di P) che, presi secondo un ordine fissato e convenzionale, danno la coppia numerica associata al punto P. Tale corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri è biunivoca per cui si tende a identificare i due oggetti. Notiamo che è anche possibile fissare sistemi di riferimento non ortogonali o non monometrici, ma non è in generale conveniente. Di seguito, riferndoci a sistema di riferimento intenderemo sistema ortogonale e monometrico.

Partendo dal punto di vista della geometria euclidea e grazie al teorema di Talete e alla similitudine dei triangoli, si può introdurre il concetto di coefficiente angolare di una retta. Fissato un sistema di riferimento nel piano e considerata una retta r non verticale, consideriamo su di essa due punti A e B.



Costruiamo quindi il triangolo rettangolo di ipotenusa AB e indichiamo con C il terzo vertice. Vogliamo dimostrare che il rapporto $\frac{BC}{AC}$ non dipende dalla scelta dei punti A e B su r. Infatti prendiamo altri due punti A' e B' su r e costruiamo il triangolo rettangolo $A'B'C'$ di ipotenusa $A'B'$. Grazie al teorema delle rette parallele tagliate de una trasversale, i triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno gli angoli congruenti, quindi sono simili. Di conseguenza $BC : AC = B'C' : A'C'$, cioè $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$. Il fatto che tale quantità non dipenda dalla scelta dei punti significa che è una caratteristica intrinseca della retta r a cui si da il nome di **coefficiente angolare** di r e che è tradizionalmente indicato con la lettera m.

Lavorando in coordinate è poi necessario introdurre anche il concetto di segno: una retta può avere anche coefficiente angolare negativo, ma si può ovviare a questo problema considerando l'ordinamento di A e B su r. Notiamo inoltre che $\overline{BC} = |y_B - y_C| = |y_B - y_A|$ e $\overline{AC} = |x_C - x_A| = |x_B - x_A|$, quindi presi due punti A e B su una retta r di coefficiente angolare m si ottiene che $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Per le rette verticali il coefficiente angolare non è definito.

Supponiamo ora che la retta r di coefficiente angolare m intersechi l'asse delle ordinate nel punto $Q(0, q)$. Consideriamo la relazione $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, valida per tutti i punti di r. In particolare se applichiamo tale relazione al generico punto $P(x, y)$ di r e a Q, otteniamo $\dfrac{y - q}{x} = m$, cioè

$$\boxed{y = mx + q \qquad \text{con } m, q \in \mathbb{R}}$$

Per opportuni m e q un'equazione di questo tipo è soddisfatta dalle coordinate dei punti di ogni retta. Se consideriamo inoltre le rette verticali, i cui punti soddisfano un'equazione del tipo $x = c$, otteniamo che ogni retta ha un'equazione della forma

$$\boxed{ax + by + c = 0 \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ costanti fissate e } (a, b) \neq (0, 0)}$$

Notiamo che, fissata una retta, i coefficienti m e q sono univocamente determinati, mentre a, b, c possono variare a meno di un coefficiente di proprozionalità.

Dicendo che una retta, o una qualsiasi figura geometrica, ha una certa equazione, intendiamo dire che i suoi punti sono tutti e soli i punti le cui coordinate sono soluzione di quella equazione.

Invertendo il punto di vista, possiamo definire le rette come l'insieme delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano un'equazione lineare $ax + by + c = 0$, con a e b non entrambi nulli, per poi verficare che tali oggetti soddisfano tutti i postulati sulle rette richiesti dalla geomatria euclidea. In questo modo, con l'uso dei numeri, le rette non devono essere considerate enti primitivi, ma vengono definite.

Per esempio il fatto che per due punti distinti passi una ed una sola retta deriva dal fatto che fissati due punti distinti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, il sistema

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c ammette una sola soluzione (a meno di proporzionalità).

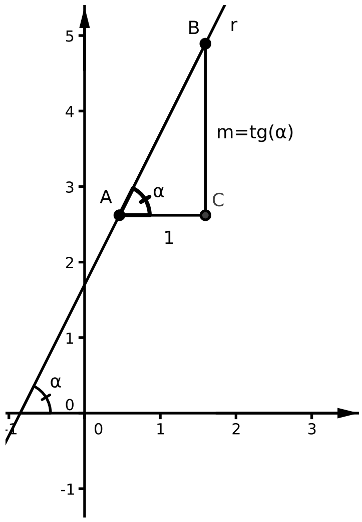
Analogamente si può utilizzare quanto suggerito dal teorema di Pitagora (N.B: preso come suggerimento) per definire la distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

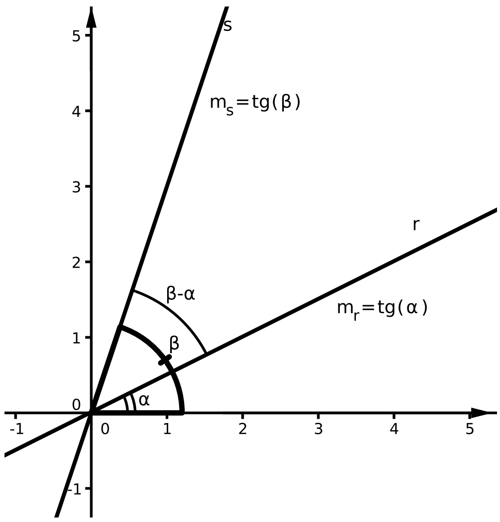
Se prendiamo questa come definizione, essa può poi essere utilizzata per dimostrare il teorema di Pitagora e gli altri teoremi relativi alle lunghezze. Inoltre, grazie a questa formula, si ottiene che l'equazione di una circonferenza di centro $C(x_C, y_C)$ e raggio r è

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Anche per quanto riguarda lo studio degli angoli, l'uso delle coordinate fornisce un valido aiuto. Abbiamo già osservato che ogni retta non verticale ha equazione $y = mx + q$. Inoltre il coefficiente angolare m fornisce informazioni sull'angolo α che r forma con il semiasse positivo delle ascisse: sappiamo infatti che se $A(x, y)$ è un punto di r, allora lo è anche il punto $B(x + 1, y + m)$; cioè, muovendosi su r, ad ogni spostamento di una unità lungo l'asse delle ascisse corrisponde uno spostamento di m unità l'ungo l'asse delle ordinate. L'angolo α rimane in questo modo univocamente determinato. Più precisamente, con l'uso della trigonometria, si ha che $\mathrm{tg}(\alpha) = m$.



Supponiamo ora di volere calcolare l'angolo compreso tra due rette non verticali. Naturalmente questo equivale a calcolare l'angolo tra le rispettive parallele passanti per l'origine, quindi possiamo supporre che le rette passino per l'origine.



Sia α l'angolo che r forma con il semiasse positivo delle ascisse, cioè $m_r = \mathrm{tg}(\alpha)$ e β l'angolo che s forma con il semiasse positivo delle ascisse, cioè $m_s = \mathrm{tg}(\beta)$. L'angolo tra r e s è $\beta - \alpha$. Se $\beta - \alpha$ non è un angolo retto possiamo usare le formule di duplicazione di seno e coseno (o direttamente quelle della tangente) per ottenere:

$$\mathrm{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha)} = \frac{\dfrac{\sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}}{\dfrac{\cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}} = \frac{\mathrm{tg}(\beta) - \mathrm{tg}(\alpha)}{1 + \mathrm{tg}(\beta)\mathrm{tg}(\alpha)}$$
$$= \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$$

Bisogna prestare un po' di attenzione ai segni perché in effetti gli angoli che formano le due rette r e s sono due angoli tra loro supplementari.

Costruzioni con riga e compasso con le coordinate

Dal punto di vista algebrico, le costruzioni con riga e compasso corrispondono a determinare le coordinate dei punti di intersezioni tra rette, tra rette e circonferenze e tra circonferenze.

Trovare i punti di intersezione tra due rette corrisponde a risolvere sistemi di equazioni lineari, cioè a risolvere equazioni mediante l'uso delle quattro operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Trovare i punti di intersezione tra una retta e una circonferenza o tra due circonferenze corrisponde a risolvere sistemi di equazioni di secondo grado, cioè a risolvere equazioni mediante l'uso delle quattro operazioni e dell'estrazione di radici quadrate.

Con queste osservazioni possiamo comprendere il

Criterio algebrico di costruibiltà (Cartesio) *Un punto del piano cartesiano* $\mathbb{R}^2$ *è costruibile con riga e compasso se e solo se le sue coordinate si possono ottenere da* 1 *mediante le operazioni* $+,\ -,\ \times,\ :\ ,\ \sqrt{\ }$.

Ad esempio i punti $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right)$ o $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ sono costruibili con riga e compasso, mentre non lo sono nè il punto $\left(\sqrt[3]{2}, 1\right)$ nè il punto $(\pi, 0)$

L'impossibilità di risolvere i problemi della **duplicazione del cubo**, della **trisezione dell'angolo** e della **quadratura del cerchio** mediante riga e compasso fu dimostrata solo nel 1800, utilizzando il criterio di Cartesio e l'algebra moderna (Galois e Abel).

CAPITOLO 2

Isometrie: definizioni

Una delle possibili critiche allo studio della geometria del piano mediante l'uso di coordinate e il modello di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è la particolarità del punto scelto come origine degli assi cartesiani. Per ovviare a questo problema si possono utilizzare delle trasformazioni che permettono di trasformare un qualsiasi punto del piano nell'origine e una retta qualsiasi nell'asse delle ascisse.

- Una **trasformazione** del piano è una funzione **biiettiva** f che ad ogni punto P del piano associa uno ed un solo punto $P' = f(P)$ del piano.
- Un' **isometria** è una trasformazione del piano che trasforma ogni coppia di punti A e B in punti $f(A)$ e $f(B)$ che hanno la medesima distanza:

  $$\mathrm{d}\,(f(A), f(B)) = \mathrm{d}\,(A, B) \qquad \text{ovvero} \qquad \overline{f(A)f(B)} = \overline{AB}, \qquad \forall A, B$$

  Le isometrie definiscono esattamente il **movimento rigido del piano**, utilizzato da Euclide senza fornirne una reale definizione.

Le trasformazioni hanno la seguente proprietà.

Proprietà. *Ogni trasformazione manda rette tra loro parallele in rette tra loro paralle. Cioè se r e s sono rette tra loro parallele: $r \parallel s$, e $r' = T(r)$, $s' = T(s)$, allora anche r' e s' sono tra loro parallele: $r' \parallel s'$.*

Tale proprietà vale per ogni tipo di trasformazione del piano. Infatti, supponiamo per assurdo che r' e s' non siano parallele e sia $P' = r' \cap s'$. Allora:

$$\begin{aligned} P' \in r' = T(r) \;&\Rightarrow\quad \text{esiste} \quad R \in r \quad \text{t.c.} \quad T(R) = P' \\ P' \in s' = T(s) \;&\Rightarrow\quad \text{esiste} \quad S \in s \quad \text{t.c.} \quad T(S) = P' \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi r e s sono parallele i punti R e S sono distinti, quindi P' dovrebbe essere immagine di due punti differenti e questo è in contraddizione con il fatto che una trasformazione è una funzione biiettiva del piano in se stesso.

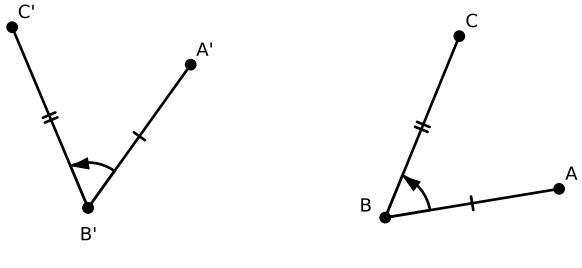
Inoltre vale il seguente importante teorema:

Teorema. *Ogni isometria f di $\mathbb{R}^2$ è determinata dalle immagini $f(A), f(B), f(C)$ di tre punti A, B, C non allineati.*

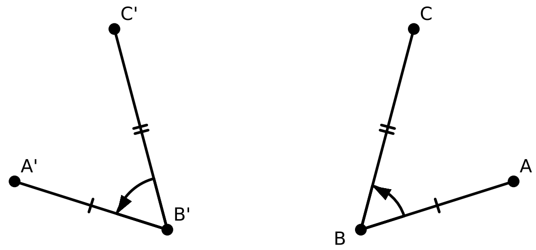
Cioè ogni isometria è determinata dall'immagine di un triangolo.

Notiamo che tre punti, presi secondo un certo ordine, individuano in maniera unica un angolo. Possiamo quindi distinguere due categorie di traformazioni del piano.

- **Trasformazioni dirette**, ovvero che mantiengono l'orientamento degli angoli: ogni angolo $A\widehat{B}C$ antiorario viene mandato nel corrispondente angolo $A'\widehat{B'}C'$ ancora antiorario.



- **Trasformazioni inverse**, ovvero che invertono l'orientamento degli angoli: ogni angolo $A\widehat{B}C$ antiorario viene mandato nel corrispondente angolo $A'\widehat{B'}C'$ orario.



In una trasformazione f si chiamano

- **punti fissi** o **punti uniti** di f i punti che vengono trasformati in se stessi: $P' = f(P) = P$;
- **rette fisse** di f le rette che vengono trasformate in se stesse: $r' = f(r) = r$. Dicendo che la retta r è una retta di punti fissi, intendiamo che ogni punto di r è un punto fisso, si tratta quindi di una condizione più forte che essere una retta fissa dove ogni punto può essere trasformato in un altro punto della medesiama retta.

Esistono quattro tipi di isometrie del piano, significativamente differenti: traslazioni, rotazioni, riflessioni e glissoriflessioni. Vediamo la definizione e le caratteristiche di ognuna.

TRASLAZIONE. Una traslazione muove ogni punto P del piano in un punto P' ad una distanza e in una direzione fissata, ovvero di un vettore fissato. Ogni traslazione è quindi determinata da due costanti $a, b \in \mathbb{R}$, ovvero da un vettore $\overrightarrow{v} = (a, b)$.

Notiamo che se $(a, b) = (0, 0)$ otteniamo la trasformazione identica, mentre le caratteristiche di una traslazione, differente dalla trasformazione identica, sono:

- si tratta di una trasformazione diretta,
- non esistono punti fissi,
- esistono infinite rette fisse (tutte le rette parallele alla direzione della traslazione).

ROTAZIONE. Chiamiamo rotazione del piano attorno all'origine O di un angolo β, con $0 \leq \beta < 2\pi$, la trasformazione che manda ogni punto P del piano nel punto P' tale che: $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $P\widehat{O}P' = \beta$.

Se $\beta = 0$ si ha la trasformazione identica, altrimenti le caratteristiche di una rotazione sono:

- si tratta di una trasformazione diretta,
- ha un solo punto fisso, quello attorno al quale avviene la rotazione,
- non ha nessuna retta fissa, tranne nel caso di una rotazione pari ad un angolo piatto; in tale caso, infatti, tutte le rette passanti per il centro di rotazione sono fisse. Notiamo che una rotazione di un angolo piatto corrisponde ad una simmetria centrale rispetto al centro di rotazione.

La composizione di una rotazione con una traslazione è ancora una rotazione rispetto ad un differente punto.

RIFLESSIONE O SIMMETRIA ASSIALE. La riflessione rispetto ad una retta r è una trasformazione che manda ogni punto P nel punto P' tale che il segmento PP' è perpendicolare a r e il punto medio di PP' appartiene a r.

Una riflessione ha le seguenti caratteristiche:

- si tratta di una trasformazione inversa,
- ha una retta di punti fissi (la retta r rispetto alla quale si effettua la riflessione, detto asse di simmetria),
- ha infinite rette fisse (tutte le rette ortogonali a r).

GLISSORIFLESSIONE O GLISSOSIMMETRIA. Una glissoriflessione si ottiene effettuando una riflessione rispetto ad una retta r, seguita da una traslazione di un vettore $\overrightarrow{v}$ parallelo a r.

Una glissoriflessione ha le seguenti caratteristiche:

- è una trasformazione inversa,
- non ha punti fissi,
- ha una sola retta fissa (la retta r)

Componendo riflessioni e traslazioni si ha la seguente suituazione:

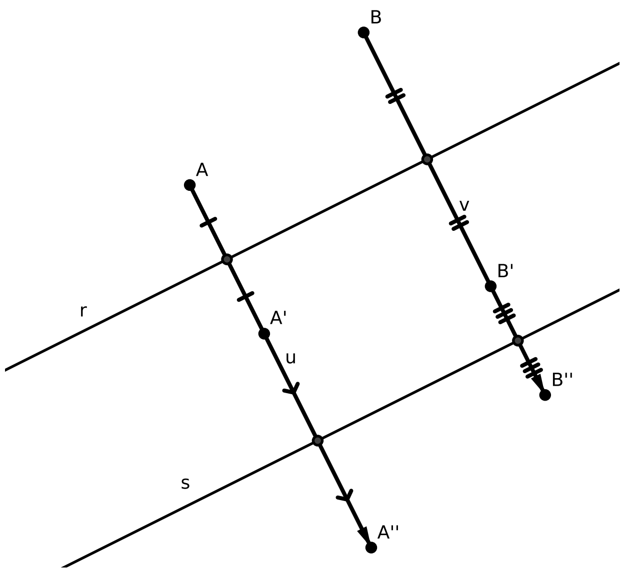
- La composizione di una riflessione rispetto a r e di una traslazione nella direzione ortogonale a r è ancora una riflessione
- la composizione di una riflessione rispetto a r e di una traslazione in una direzione non ortogonale nè parallela a r è ancora una glissoriflessione rispetto a un'altra retta.

Esiste un importante teorema che permette di determinare tutte le isometrie del piano.

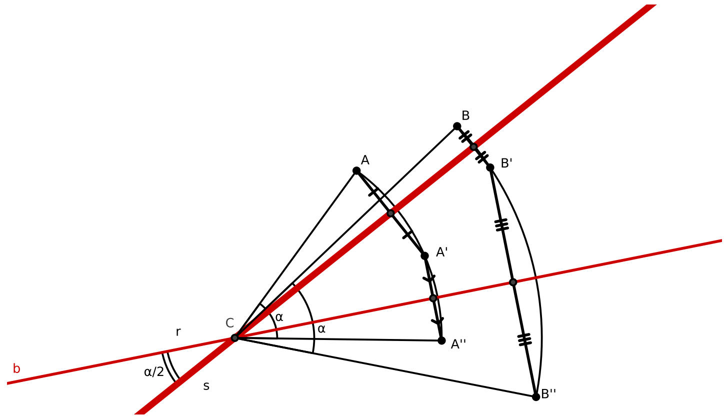
Teorema delle tre riflessioni. *Ogni isometria del piano è la composizione di una, due o tre riflessioni.*

Inoltre:

- Se l'isometria è composizione di **due** riflessioni rispetto a rette parallele, allora si tratta di una traslazione (di direzione perpendicolare alle rette e distanza uguale al doppio della distanza delle due rette)



- Se l'isometria è composizione di **due** riflessioni rispetto a rette incidenti in un punto C, allora si tratta di una rotazione di centro C. L'angolo di rotazione è il doppio dell'angolo formato da r e s.



- Se l'isometria è composizione di **tre** riflessioni rispetto a tre rette non tutte parallele, allora si tratta di una glissoriflessione.
- Se l'isometria è composizione di **tre** riflessioni rispetto a tre rette parallele, allora si tratta ancora di una riflessione.

Non abbiamo parlato in questa sezione delle **simmetrie centrali**. Una simmetria centrale rispetto ad un punto C è la trasformazione che associa ad ogni punto P il punto P' distinto da P appartenente alla retta CP e tale che $\overline{CP} = \overline{CP'}$. Tali trasformazioni hanno infinite rette fisse (tutte quelle passanti per C) e C è il solo punto fisso. Esse corrispondono ad una rotazione di centro C di un angolo pari ad un angolo piatto e sono ottenute dalla composizione di due riflessioni rispetto a rette ortogonali.

CAPITOLO 3

Isometrie: punto di vista geometrico

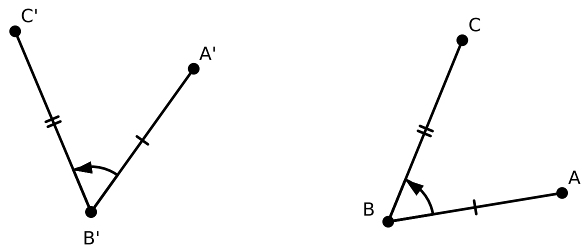
Abbiamo visto che una trasformazione manda rette tra loro parallele in rette tra loro paralle. Cioè se r e s sono rette tra loro parallele: $r \parallel s$, e $r' = T(r)$, $s' = T(s)$, allora anche r' e s' sono tra loro parallele: $r' \parallel s'$.

Abbiamo anche visto che una trasformazione T è univocamente determinata dall'immagine di tre punti $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(D) = D'$.

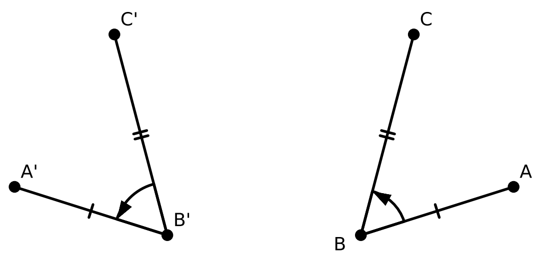
Come si può individuare un'isometria e le sue caratteristiche nota l'immagine di tre punti?

Innanzitutto è immediato verificare se si tratta di un'isometria diretta o inversa. Ricordiamo che:

- Una **trasformazione diretta** mantiene l'orientamento degli angoli: ogni angolo $A\widehat{B}C$ antiorario viene mandato nel corrispondente angolo $A'\widehat{B'}C'$ ancora antiorario.



- Una **trasformazione inversa** inverte l'orientamento degli angoli: ogni angolo $A\widehat{B}C$ antiorario viene mandato nel corrispondente angolo $A'\widehat{B'}C'$ orario.



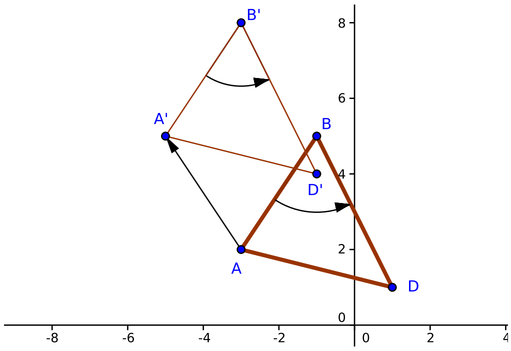
Una volta stabilito se la trasformazione è diretta o inversa si procede per esclusione; infatti, la traslazione e la riflessione sono facilmente riconoscibili.

- Se si tratta di un'isometria diretta diversa da una traslazione, necessariamente è una rotazione.
- Se si tratta di un'isometria inversa diversa da una riflessione, necessariamente è una glissoriflessione.

Vediamo con degli esempi come determinare le caratteristiche delle differenti isometrie.

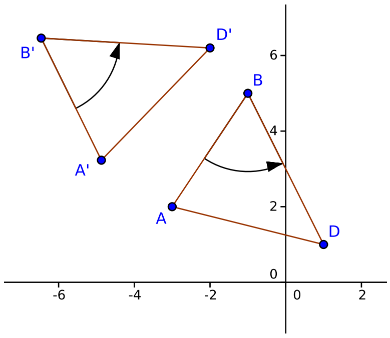
Consideriamo i punti $A = (-3, 2)$, $B = (-1, 5)$ e $D = (1; 1)$ e consiederiamo le seguenti trasformazioni:

- TRASLAZIONE. Siano $A' = (-5; 5)$, $B' = (-3; 8), D' = (-1; 4)$:



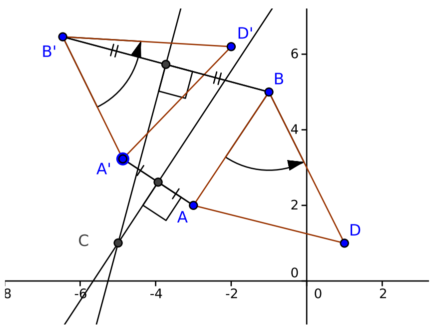
Evidentemente si tratta di una trasformazione diretta ed in particolare di una traslazione. Il vettore che caratterizza la traslazione è, per esempio, il vettore AA'.

- ROTAZIONE. Siano $A' = (-4,87; 3,23)$, $B' = (-6,46; 6,46)$, $D' = (-2; 6,2)$:

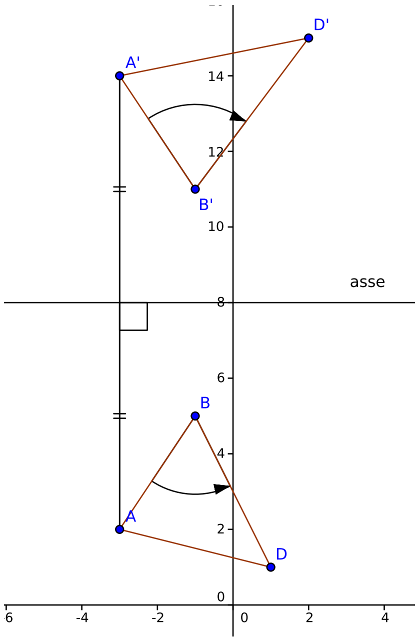


Si tratta di una trasformazione diretta che non è una traslazione, quindi si tratta di una rotazione.

Come si possono trovare centro e quindi angolo di rotazione? Notiamo che se $A' = T(A)$ è ottenuto mediante una rotazione di centro C, allora in particolare $AC = A'C$, ovvero C appartiene all'asse del segmento AA'. Analogamente se $B' = T(B)$, allora $CB = CB'$ e C appartiene all'asse di BB'. Quindi il centro di rotazione C può essere trovato come il punto di intersezione tra gli assi di AA' e BB'; a questo punto l'angolo di rotazione è semplicemente l'angolo $\widehat{ACA'}$.

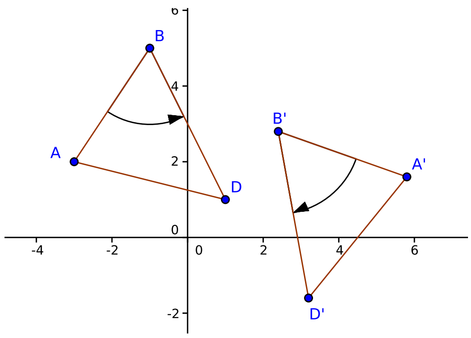


- RIFLESSIONE. Siano $A' = (-3; 14)$, $B' = (-1; 11)$, $D' = (2; 15)$:



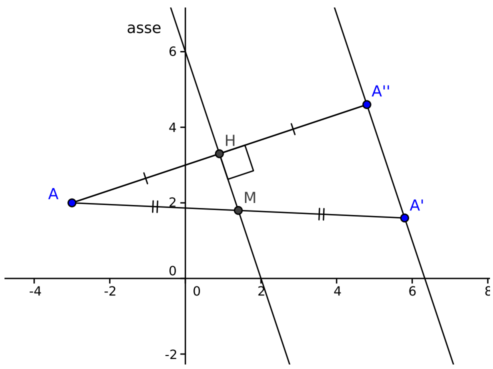
Si tratta di una trasformazione inversa ed in particolare di una riflessione. L'asse di simmetria è, per esempio, l'asse del segmento AA'.

- GLISSORIFLESSIONE. Siano $A' = (5,8;1,6)$, $B' = (2,4;2,8), D' = (3,2;-1,6)$:

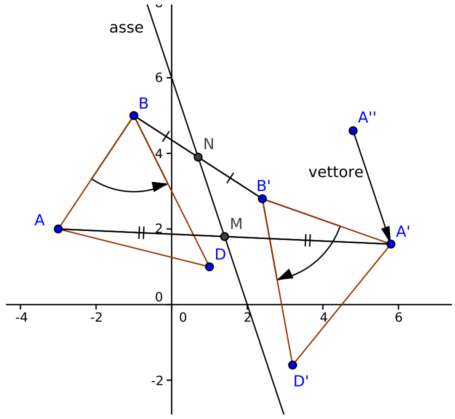


Si tratta di una trasformazione inversa che non è una riflessione, quindi si tratta di una glissoriflessione.

Come si possono trovare l'asse di simmetria e quindi il vettore di traslazione? È sufficiente osservare che, per Talete, l'asse di simmetria divide il segmento AA' in due parti congruenti, quindi il punto medio M di AA' appartiene all'asse. Sia infatti M il punto di intersezione tra la retta AA' e l'asse di simmetria della glissoriflessione e sia A'' il simmetrico di A rispetto all'asse. La retta $A''A'$ è parallela all'asse, quindi, per Talete, $\dfrac{AM}{MA'} = \dfrac{AH}{HA''} = 1$; quindi $AM = MA''$, ovvero M è il punto medio del segmento AA''.



Anaolgamente il punto medio N di BB' appartiene all'asse e l'asse è la retta MN. Individuato l'asse a di simmetria è sufficiente determinare il punto A'', ottenuto da A tramite una simmetria rispetto ad a e quindi individuare il vettore $A''A'$ della traslazione.



CAPITOLO 4

Isometrie: lavorando con le coordinate

Ricordiamo che:

- Una **trasformazione** del piano è una funzione **biiettiva** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ad ogni punto $P(x; y)$ del piano associa uno ed un solo punto $P' = f(P) = (x'; y')$ del piano.
- Un' **isometria** è una trasformazione del piano che trasforma ogni coppia di punti A e B in punti $f(A)$ e $f(B)$ che hanno la medesima distanza:

$$\mathrm{d}\left(f(A), f(B)\right) = \mathrm{d}\left(A, B\right) \qquad \text{ovvero} \qquad \overline{f(A)f(B)} = \overline{AB}, \qquad \forall A, B$$

Inoltre possiamo quindi distinguere due categorie di traformazioni del piano

- **Trasformazioni dirette**, ovvero che mantiengono l'orientamento degli angoli.
- **Trasformazioni inverse**, ovvero che invertono l'orientamento degli angoli.

In una trasformazione f si chiamano

- **punti fissi** o **punti uniti** di f i punti che vengono trasformati in se stessi: $P' = f(P) = P$;
- **rette fisse** di f le rette che vengono trasformate in se stesse: $r' = f(r) = r$. Dicendo che la retta r è una retta di punti fissi, intendiamo che ogni punto di r è un punto fisso, si tratta quindi di una condizione più forte che essere una retta fissa dove ogni punto può essere trasformato in un altro punto della medesiama retta.

Analizziamo le quattro isometrie, considerando in particolare cosa avviene per le coordiante dei punti.

TRASLAZIONE. Una traslazione muove ogni punto P del piano in un punto P' ad una distanza e in una direzione fissata, ovvero di un vettore fissato. Ogni traslazione è quindi determinata da due costanti $a, b \in \mathbb{R}$, ovvero da un vettore $\overrightarrow{v} = (a, b)$. Nel piano cartesiano una traslazione ha qundi equazioni:

$$\boxed{t_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}}$$

È facile verificare che si tratta effettivamente di una isometria: se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ sono due qualsiasi punti, allora

$$\overline{t_{a,b}(P_1)t_{a,b}(P_2)} = \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + b - y_1 - b)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \overline{P_1P_2}$$

Notiamo che se $(a, b) = (0, 0)$ otteniamo la trasformazione identica, mentre le caratteristiche di una traslazione, differente dalla trasformazione identica, sono:

- si tratta di una trasformazione diretta,
- non esistono punti fissi,
- esistono infinite rette fisse (tutte le rette parallele alla direzione della traslazione).

ROTAZIONE. Chiamiamo rotazione del piano attorno all'origine O di un angolo β la trasformazione che manda ogni punto P del piano nel punto P' tale che: $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $P\widehat{O}P' = \beta$. Nel piano cartesiano ogni rotazione attorno all'**origine** ha equazioni del tipo

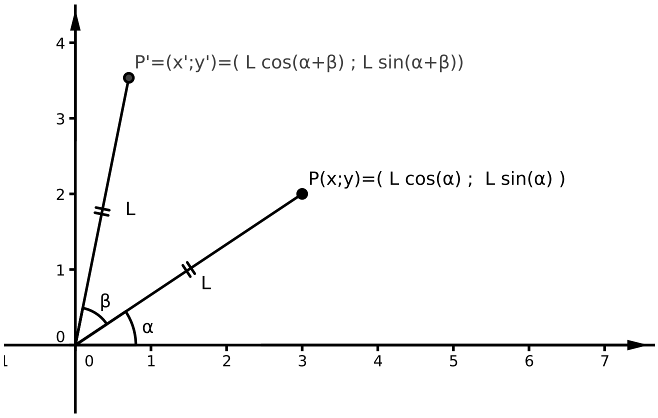
$$r_{c,s}(x,y) = (cx - sy, sx + cy) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy \end{cases} \qquad c, s \in \mathbb{R}, \quad c^2 + s^2 = 1$$

Notiamo che la condizione $c^2 + s^2 = 1$ assicura che il sistema

$$\boxed{\begin{cases} \cos(\beta) = c \\ \sin(\beta) = s \end{cases}}$$

ammette un'unica soluzione $0 \le \beta < 2\pi$.

Verifichiamo che una rotazione in senso antiorario di un angolo β corrisponde esattamente ad una trasformazione del tipo $r_{c,s}$. Consideriamo la rotazione di un angolo β che manda P in P'. Indichiamo $\overline{OP} = \overline{OP'} = l$ e con α l'angolo formato da OP con il semiasse positivo delle ascisse.



Notiamo che se $P = (x, y)$, si ha $x = l\cos(\alpha)$ e $y = l\sin(\alpha)$; analogamente se $P' = (x', y')$, si ha $x' = l\cos(\alpha + \beta)$ e $y' = l\sin(\alpha + \beta)$. Indicato $c = \cos(\beta)$ e $s = \sin(\beta)$, otteniamo:

$$\begin{cases} x' = l\cos(\alpha + \beta) = l\,[\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)] = l\cos(\alpha)c - l\sin(\alpha)s = cx - sy \\ y' = l\sin(\alpha + \beta) = l\,[\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)] = l\sin(\alpha)c + l\cos(\alpha)s = sx + cy \end{cases}$$

Componendo rotazioni attorno all'origine con traslazioni si possono ottenere rotazioni attorno ad un qualsiasi punto.

Come nel caso delle rotazioni è immediato verificare che si tratta di un'isometria.

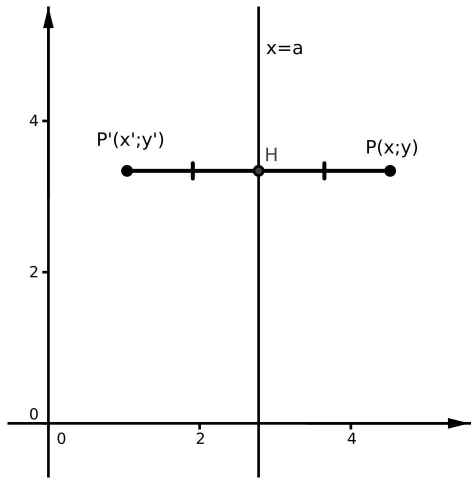
Notiamo che le caratteristiche di una rotazione sono:

- si tratta di una trasformazione diretta,
- ha un solo punto fisso, quello attorno al quale avviene la rotazione,
- non ha nessuna retta fissa, tranne nel caso di una rotazione pari ad un angolo piatto; in tale caso, infatti, tutte le rette passanti per il centro di rotazione sono fisse. Notiamo che una rotazione di un angolo piatto corrisponde ad una simmetria centrale rispetto al centro di rotazione. In particolare la rotazione attorno all'origine di un angolo piatto è la simmetria centrale rispetto all'origine, ovvero la trasformazione $(x', y') = (-x, -y)$.

La composizione di una rotazione con una traslazione è ancora una rotazione rispetto ad un differente punto.

RIFLESSIONE O SIMMETRIA ASSIALE. La riflessione rispetto ad una retta r è una trasformazione che manda ogni punto P nel punto P' tale che il segmento PP' è perpendicolare a r e il punto medio di PP' appartiene a r.

Nel piano cartesiano una riflessione rispetto ad una retta verticale si ottiene nel seguente modo:



Il punto P viene mandato in un punto P' con la stessa ordinata, mentre l'ascissa si può ricavare dal fatto che H è il punto medio del segmento PP', ovvero $a = \dfrac{x+x'}{2}$ e $x' = 2a - x$. Di conseguenza le equazioni della simmetria rispetto ad una retta verticale di equazione $x = a$ sono:

$$\boxed{h_{x=a}(x,y) = (2a-x, y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}}$$

È immediato verificare che si tratta di un'isometria. Nel caso particolare della simmetria rispetto all'asse delle ordinate, di equazione $x = 0$, la simmetria ha equazioni:

$$h_{x=0}(x,y) = (-x, y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

In maniera analoga si ricavano le equazioni di una simmetria rispetto ad una retta orizzontale $y = b$:

$$\boxed{h_{y=b}(x,y) = (x, 2b-y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}}$$

Nel caso particolare della simmetria rispetto all'asse delle ascisse, di equazione $y = 0$, la simmetria ha equazioni:

$$h_{y=0}(x,y) = (x, -y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

La riflessione h_r rispetto ad una qualsiasi retta r si ottiene combinando rotazioni e riflessioni rispetto a rette orizzontali o verticali. Si tratta infatti di trasformare, mediante una rotazione, la retta r in una retta r' verticale (o orizzontale) e di effettuare la riflessione $h_{r'}$. Procedendo a ritroso e effettuando la rotazione inversa si ottiene la riflessione rispetto a r.

Una riflessione ha le seguenti caratteristiche:

- si tratta di una trasformazione inversa,
- ha una retta di punti fissi (la retta r rispetto alla quale si effettua la riflessione),
- ha infinite rette fisse (tutte le rette ortogonali a r).

In particolare la riflessione rispetto alla retta $y = x$ è la trasformazione che scambia le due componenti: $(x', y') = (y, x)$. In questo caso, partendo dal grafico di una funzione $f(x)$ invertibile, si ottiene il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$.

GLISSORIFLESSIONE O GLISSOSIMMETRIA. Una glissoriflessione si ottiene effettuando una riflessione rispetto ad una retta r, seguita da una traslazione di un vettore $\overrightarrow{v}$ parallelo a r.

Una glissoriflessione ha le seguenti caratteristiche:

- è una trasformazione inversa,
- non ha punti fissi,
- ha una sola retta fissa (la retta r)

Componendo riflessioni e traslazioni si ha la seguente situazione:

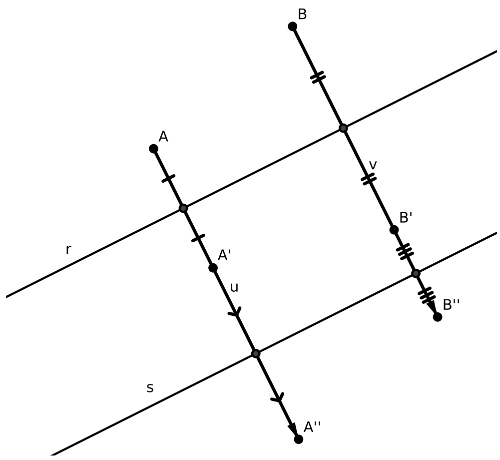
- La composizione di una riflessione rispetto a r e di una traslazione nella direzione ortogonale a r è ancora una riflessione
- la composizione di una riflessione rispetto a r e di una traslazione in una direzione non ortogonale nè parallela a r è ancora una glissoriflessione rispetto a un'altra retta.

Esiste un importante teorema che permette di determinare tutte le isometrie del piano.

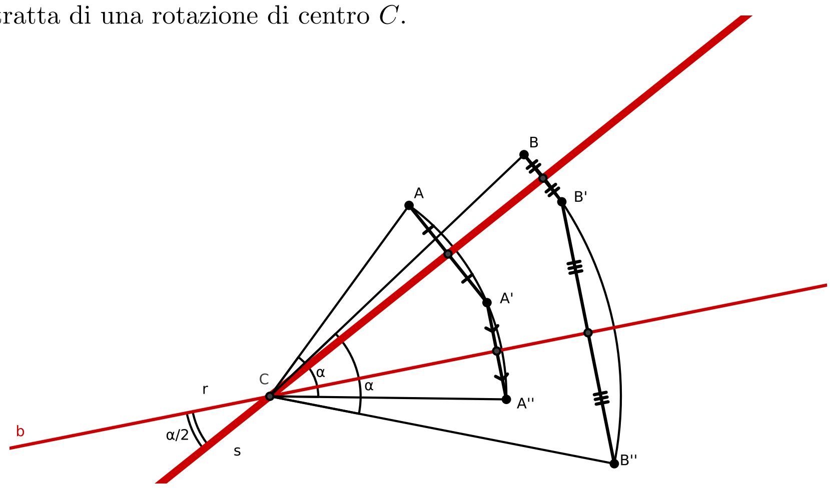
Teorema delle tre riflessioni. *Ogni isometria del piano è la composizione di una, due o tre riflessioni.*

Inoltre:

- Se l'isometria è composizione di **due** riflessioni rispetto a rette parallele, allora si tratta di una traslazione (di direzione perpendicolare alle rette e distanza uguale al doppio della distanza delle due rette)



- Se l'isometria è composizione di **due** riflessioni rispetto a rette incidenti in un punto C, allora si tratta di una rotazione di centro C.



- Se l'isometria è composizione di **tre** riflessioni rispetto a tre rette non tutte parallele, allora si tratta di una glissoriflessione.
- Se l'isometria è composizione di **tre** riflessioni rispetto a tre rette parallele, allora si tratta ancora di una riflessione.

Possiamo sintetizzare quanto ottenuto nel seguente modo. In generale un'isometria è una trasformazione di uno dei due seguenti tipi:

TRASFORMAZIONE DIRETTA, ovvero che mantiene l'orientamento degli angoli. Le trasformazioni dirette sono **rotazioni** o **traslazioni**, cioè la composizione di due riflessioni.

Nel piano cartesiano ogni trasformazione diretta ha equazioni del tipo:

Trasformazione diretta: rotazione o traslazione. $\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$ con $c^2 + s^2 = 1$

In particolare:

- si tratta di una traslazione se e solo se $c = 1$ e $s = 0$,
- se $(c, s) \neq (1, 0)$ si tratta di una rotazione.

  La rotazione è attorno all'origine se e solo se $a = b = 0$. In caso contrario per trovare il centro di rotazione basta tenere conto del fatto che il centro di rotazione è l'unico punto unito della trasformazione, ovvero un punto P tale che $P' = P$. Utilizzando le coordinate questa condizione si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = cx - sy + a \\ y = sx + cy + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-c)x + sy = a \\ sx - (1-c)y = -b \end{cases}$$

  Risolvendo tale sistema, nelle incognite x e y si ottengono le coordiante del centro di rotazione.

Ad ogni trasformazione diretta possiamo associare la seguente matrice dei coefficienti:

Trasformazione diretta: rotazione o traslazione. $M = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = c^2 + s^2 = 1$

TRASFORMAZIONE INVERSA., ovvero che inverte l'orientamento degli angoli. Le trasformazioni inverse sono **riflessioni** o **glissoriflessioni** , cioè la composizione di una o tre riflessioni.

Nel piano cartesiano ogni trasformazione inversa ha equazioni del tipo:

Trasformazione inversa: riflessione o glissoriflessione. $\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$ con $c^2 + s^2 = 1$

In questo caso, per distinguere le riflessioni dalle glissoriflessioni è necessaria la ricerca dei punti fissi:

- le riflessioni hanno infiniti punti fissi (tutti i punti dell'asse di simmetria),
- le glissoriflessioni non hanno punti fissi.

A tale scopo, come nel caso della ricerca del centro di rotazione, si risolve il sistema

$$\begin{cases} x = cx - sy + a \\ y = sx + cy + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-c)x + sy = a \\ sx - (1-c)y = -b \end{cases}$$

Se il sistema ammette infinite soluzioni si tratta di una riflessione (le soluzioni sono i punti dell'asse di riflessione); se il sistema non ammette soluzioni si tratta di una glissoriflessione.

Ad ogni trasformazione inversa possiamo associare la seguente matrice dei coefficienti:

Trasformaz. inversa: riflessione o glissoriflessione. $M = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = -c^2 - s^2 = -1$

CAPITOLO 5

Alcuni approfondimenti

Sappiamo che ogni riflessione ha equazioni

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases} \qquad \text{con } s^2 + c^2 = 1$$

La condizione $s^2 + c^2 = 1$ implica l'esistenza di un unico angolo β, con $0 \leq \beta < 2\pi$, tale che

$$\boxed{\begin{cases} s = \sin(\beta) \\ c = \cos(\beta) \end{cases}}$$

Sotto quali condizioni otteniamo una riflessione?

Cominciamo con alcune osservazioni sul caso $c = 1$ e quindi $s = 0$ e $\beta = 0$. In tale caso si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = -y + b \end{cases}$$

Per verificare che si tratta una riflessione e ricercare l'asse di simmetria, procediamo con la ricerca dei punti fissi, ottenendo:

$$\begin{cases} x = x + a \\ y = -y + b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

La trasformazione ha infiniti punti fissi ed è quindi una riflessione se e solo se $a = 0$. In tale caso l'asse di simmetria è la retta orizzontale $y = \dfrac{b}{2}$.

Procediamo ora escludendo il caso $c = 1$ e quindi $s = 0$.

Cominciamo innanzitutto a stabilire le condizioni affinchè si tratti effettivamente di una riflessione e non di una glissoriflessione. Una riflessione ha infiniti punti fissi: tutti i punti dell'asse di simmetria. Di conseguenza il sistema

$$\begin{cases} x = cx + sy + a \\ y = sx - cy + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - c)x - sy = a \\ sx - (c + 1)y = -b \end{cases}$$

deve avere infinite soluzioni. Moltiplicando la prima equazione per $-s$ e la seconda per $1 - c$, entrambi non nulli, e sommando le due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} -s(1 - c)x + s^2 y = -as \\ s(1 - c)x - (1 - c^2)y = -b(1 - c) \end{cases} \Rightarrow (s^2 + c^2 - 1)y = -as + b(c - 1)$$

Ricordando inoltre che $s^2 + c^2 = 1$, otteniamo l'equazione, nell'incognita y, $as - b(c - 1) = 0$. Tale equazione dipende dai valori dei parametri a, b, c e s:

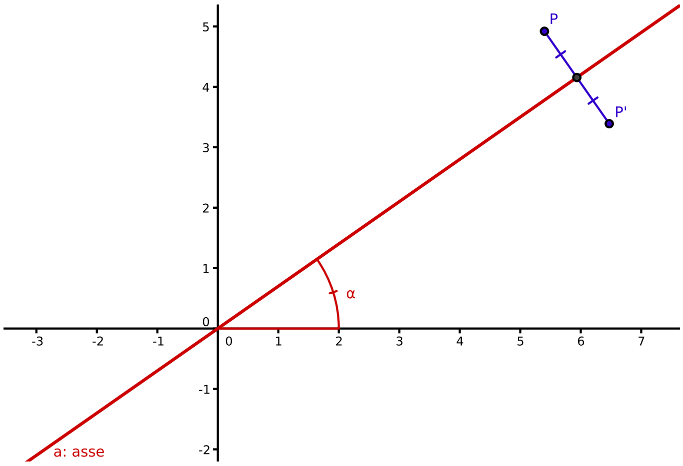
- Se $b \neq \dfrac{as}{c - 1}$, l'equazione risulta impossibile, quindi non esistono punti fissi e la trasformazione è una glissoriflessione.
- Se $b = \dfrac{as}{c - 1}$, l'equazione risulta indeterminata, quindi esistono infiniti punti fissi e la trasformazione è una riflessione.

Qual è il significato dei coefficienti c e s della riflessione?

Analizziamo ora il significato dell'angolo β sottinteso nelle equazioni della riflessione. La domanda che ci poniamo è:

> Che relazione c'è tra l'angolo β e l'asse di simmetria?

Supponiamo per semplicità che l'asse di simmetria passi per l'origine e sia α l'angolo che esso forma con il semiasse positivo delle ascisse.

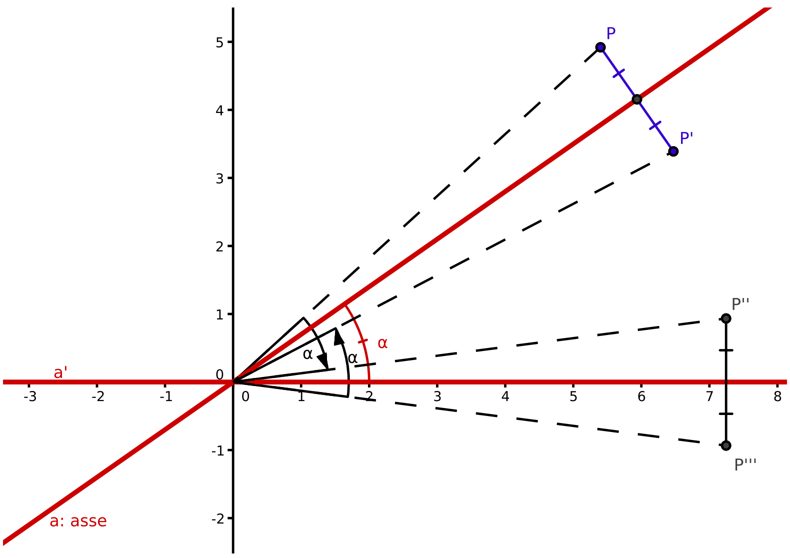


Cerchiamo di trovare le equazioni della riflessione rispetto all'asse a, capendo così il significato dei coefficienti che le formano. Siccome sappiamo calcolare la riflessione rispetto all'asse delle ascisse senza l'uso di particolari formule, possiamo procedere nel seguente modo:

(1) Effettuiamo una rotazione antioraria di un angolo α e di centro l'origine. In questo modo l'asse di simmetria a viene trasformato nell'asse delle ascisse, e il generico punto P viene mandato in un punto P'' di cui sappiamo calcolare le coordinate.

(2) Effettuiamo la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. In questo modo il punto P'' viene mandato in un punto P'''.

(3) Effettuiamo una rotazione oraria di un angolo α e di centro l'origine. In questo modo l'asse, lasciato invariato dalla riflessione, viene ritrasformato nell'asse a originale e P''' viene mandato nel punto P', corrispondente a P tramite la riflessione di asse a.



Sia quindi $P(x;y)$ il generico punto del piano e vediamo come vengono trasformate le sue coordinate tramite i tre passaggi descritti sopra.

(1) Notiamo che una rotazione antioraria di un angolo α, corrisponde ad una rotazione di angolo $-\alpha$. Quindi il generico punto $P(x;y)$ viene mandato nel punto $P''(x'';y'')$ definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'' = \cos(-\alpha)x - \sin(-\alpha)y \\ y'' = \sin(-\alpha)x + \cos(-\alpha)y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x'' = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \\ y'' = -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{cases}$$

(2) Procediamo ora con la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Le coordinate del punto $P'''(x''';y''')$, corrispondente a P'' sono date da:

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = -y'' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x''' = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \\ y''' = \sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y \end{cases}$$

(3) Infine effettuiamo una rotazione oraria di angolo α per cui il punto P''' viene mandato nel punto $P'(x';y')$ definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = \cos(\alpha)x''' - \sin(\alpha)y''' \\ y' = \sin(\alpha)x''' + \cos(\alpha)y''' \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \cos(\alpha)\left[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y\right] - \sin(\alpha)\left[\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y\right] \\ y' = \sin(\alpha)\left[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y\right] + \cos(\alpha)\left[\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y\right] \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \cos^2(\alpha)x + \sin(\alpha)\cos(\alpha)y - \sin^2(\alpha)x + \sin(\alpha)\cos(\alpha)y \\ y' = \sin(\alpha)\cos(\alpha)x + \sin^2(\alpha)y + \sin(\alpha)\cos(\alpha)x - \cos^2(\alpha)y \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right)x + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)y \\ y' = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)x - \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right)y \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \cos(2\alpha)x + \sin(2\alpha)y \\ y' = \sin(2\alpha)x - \cos(2\alpha)y \end{cases}$$

Di conseguenza la generica riflessione rispetto ad un asse passante per l'origine ha equazioni:

$$\boxed{\begin{cases} x' = \cos(2\alpha)\,x + \sin(2\alpha)\,y \\ y' = \sin(2\alpha)\,x - \cos(2\alpha)\,y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = cx + sy \\ y' = sx - cy \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} c = \cos(2\alpha) \\ s = \sin(2\alpha) \end{cases}}$$

Quindi l'angolo β sottinteso nelle equazioni di una riflessione

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases} \quad \text{con } c^2 + s^2 = 1, \text{ quindi con } \begin{cases} c = \cos(\beta) \\ s = \sin(\beta) \end{cases}$$

è in relazione con l'angolo α che l'asse di simmetria forma con il semiasse positivo dell'asse delle ascisse tramite la regola

$$\boxed{\beta = 2\alpha}$$

CAPITOLO 6

Affinità

Facciamo un passo indietro rispetto ai capitoli precedenti. Abbiamo detto che una **trasformazione** del piano è una funzione biiettiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ad ogni punto P del piano associa uno ed un solo punto $P' = f(P)$ del piano. Anche la trasformazione banale $f(P) = P$ è una trasformazione del piano detta trasformazione identica e indicata con Id. Così come per le note funzioni reali è possibile effettuare la **composizione** di trasformazioni: date due trasformazioni f e g del piano, la funzione $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto P il punto $f(g(P))$ è ancora una trasformazione del piano, in quanto biiettiva. Notiamo che in generale la composizione di funzioni non è commutativa: $f \circ g \neq g \circ f$ (così come non lo è in generale la composizione di funzioni). L'insieme $\mathcal{T}$ delle trasformazini del piano con la composizione possiede la struttura di gruppo (non commutativo):

- Se f e g sono due trasformazioni del piano, anche la loro composizione $f \circ g$ è una trasformazione del piano.
- Esiste l'elemento neutro $Id \in \mathcal{T}$ tale che $f \circ Id = Id \circ f = f \quad \forall f \in \mathcal{T}$,
- Esiste l'inverso di ogni elemento: per ogni $f \in \mathcal{T}$ esiste $f^{-1} \in \mathcal{T}$ tale che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$.
- La composizione è associativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad \forall f, g, h \in \mathcal{T}$,

Tra tutte le trasformazioni del piano ci interesseremo solo delle **affinità** o trasformazioni lineari o trasformazioni affini. Tali trasformazioni hanno la caratteristica di trasformare punti allineati in punti allineati (cioè rette in rette), di mantenere il parallelismo, cioè di trasformare una coppia di rette parallele in una coppia di rette ancora parallele.

Per le affinità vale lo stesso teorema enunciato per le isometrie:

Ogni affinità f di $\mathbb{R}^2$ è determinata dalle immagini $f(A), f(B), f(C)$ di tre punti A, B, C non allineati.

Da un punto di vista algebrico-analitico, possiamo così analizzare le trasformazioni. A ogni punto P del piano possiamo associare le sue coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; una trasformazione f del piano è definita quando conosciamo la regola che, date le coordinate (x, y) di un punto P, ci permette di determinare in maniera biiunivoca la sue coordinate (x', y') dell'immagine $P' = f(P)$. Si può dimostrare che ogni affinità ha, dal punto di vista delle coordinate, equazioni:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + a \\ y' = \gamma x + \delta y + b \end{cases}$$

con la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

non degenere, ossia $\det(M) = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. In maniera intuitiva: il fatto che le affinità siano caratterizzate da equazioni lineari (di primo grado) deriva dal fatto che si tratta di trasformazioni che mandano rette in rette. La condizione sulla matrice M, invece, è legata alla biiettività: perché la trasformazione sia biiettiva è necessario che ogni punto (x', y') sia immagine di uno ed un solo punto (x, y); dal punto di vista dell'analisi questo significa che, assegnati x' e y' il sistema

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + a \\ y' = \gamma x + \delta y + b \end{cases}$$

deve sempre ammettere un'unica soluzione (x, y). Moltiplicando la prima equazione per γ e la seconda per $-\alpha$ e sommandole otteniamo

$$\gamma x' - \alpha y' = (\gamma\beta - \alpha\delta)y + \gamma a - \alpha b \quad \Rightarrow \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)y = \alpha y' - \alpha x' + \gamma a - \alpha b \quad \Rightarrow$$
$$y = \frac{\gamma y' - \alpha x' + \gamma a - \alpha b}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

dove l'ultimo passaggio è lecito se e solo se $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Analogamente, moltiplicando la prima equazione per δ e la seconda per $-\beta$ e sommandole otteniamo

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)x = \delta x' - \beta y' - \delta a + \beta b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\delta x' - \beta y' - \delta a + \beta b}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

dove l'ultimo passaggio è lecito se e solo se $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Di conseguenza il sistema nelle incognite x e y ha soluzione, cioè la trasformazione è invertibile, se e solo se $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Possiamo ora definire le **similitudini** o **dilatazioni**

Una **dilatazione** di **ragione** k è una trasformazione che altera le distanze secondo un fattore numerico positivo costante k.

In formule: una trasformazione $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una dilatazione di rapporto k se

$$\overline{f_k(A)f_k(B)} = k \cdot \overline{AB} \qquad \forall A, B \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Naturalmente le isometrie sono similitudini con costante di dilatazione $k = 1$. Anche le similitudini trasformano rette in rette e mantengono il parallelismo, quindi abbiamo la seguente catena di inclusioni

Isometrie $\subset$ Similitudini $\subset$ Affinità

Tra tutte le similitudini hanno un ruolo particolarmente rilevante le **omotetie**.

Un'**omotetia** di centro O e **ragione** $k > 0$ è una trasformazoine del piano tale che

- Il punto O è un punto fisso,
- Ogni punto A è trasformato nel punto A' appartenente alla semiretta OA di origine O tale che $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$.

Il gruppo delle similitudini è strettamente legato al gruppo delle omotetie: si può dimostrare che ogni similitudine si può ottenere per composizione di una omotetia e di una isometria. Quindi lo studio delle isometrie e delle omotetie permette una completa conoscenza di tutte le similitudini.

Dal punto di vista analitico, un'affinità

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + a \\ y' = \gamma x + \delta y + b \end{cases}$$

è una similitudine di rapporto k se e solo se la matrice associata $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ è tale che $M = k \cdot M'$, con $k > 0$ e M' matrice associata ad un'isometria, ovvero $\det(M') = \pm 1$. Per quanto osservato per le isometrie, otteniamo che una matrice M di una similitudine è di uno dei due seguenti tipi:

Similitudine **diretta** - $\quad M = k \cdot \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \det(M) = 1$

Una similitudine diretta è data dalla composizione di una isometria diretta (traslazione o rotazione) con un'omotetia.

Similitudine **inversa** - $\quad M = k \cdot \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \det(M) = -1$

Una similitudine inversa è data dalla composizione di una isometria inversa (riflessione o glissoriflessione) con un'omotetia.

Tra tutte le similitudini, l'omotetia di centro (x_0, y_0) e rapporto k ha equazione:

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad M = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = kI_2$$

Utilizzando l'omotetia verifichiamo la seguente curiosa proprietà. Studiando le parabole e come caso particolare quelle con vertice nell'origine di equazione $y = ax^2$, siamo solito dire che il parametro a determina l'ampiezza della parabola: all'aumentere di a, in valore assoluto, l'apertura della parabola diminuisce e viceversa. In realtà si tratta di un effetto ottico:

tutte le parabole sono tra loro simili

quindi possono essere ottenute una dall'altra tramite una dilatazione. In particolare le parabole con vertice nell'origine possono essere ottenute una dall'altra tramite un'omotetia di centro l'origine.

Siano infatti $y = a_1\, x^2$ e $y = a_2\, x^2$ due parabole con vertice nell'origine. Applichiamo alla prima un'omotetia di centro l'origine e rapporto $k = \dfrac{a_1}{a_2}$, quindi di equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_1}{a_2}\, x \\ y' = \dfrac{a_1}{a_2}\, y \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_2}{a_1}\, x' \\ y = \dfrac{a_2}{a_1}\, y' \end{cases}$$

Sostidendo le seconde equazioni nell'equazione della parabola $y = a_1\, x^2$ otteniamo:

$$\frac{a_2}{a_1}\, y' = a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\, x'\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_1}\, y' = \frac{a_2^2}{a_1}\, x'^2 \quad \Rightarrow \quad y' = a_2 x'^2 \quad \Rightarrow \quad y = a_2 x^2$$

Cioè proprio la seconda parabola. Quindi le due parabole sono simili con rapporto di similitudine $k = \dfrac{a_1}{a_2}$.

CAPITOLO 7

Esercizi

Isometrie

Esercizio 1. Dati i punti i $O(0,0),\ A(2,1),\ B(1,3)$, determinare l'isometria $f(x,y)=(x',y')$ tale che $f(A)=A',\ f(B)=B',\ f(O)=O'$ nei seguenti casi.

Stabilire in particolare se si tratta di una traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione trovando gli eventuali punti fissi.

Verificare il risultato con GeoGebra.

Suggerimento: rappresenta i punti in modo da capire se si tratta di un'isometria diretta o inversa prima di cominciare calcoli.

a) $O'=\left(-3,\ \dfrac{1}{2}\right),\ A'=\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right),\ B'=\left(-2,\ \dfrac{7}{2}\right).$

b) $O'=(1,\ 0),\ A'=\left(\dfrac{5-2\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{1+4\sqrt{2}}{3}\right),\ B'=\left(\dfrac{4-6\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}\right).$

c) $O'=(0,\ 0),\ A'=\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{11}{5}\right),\ B'=\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{13}{5}\right).$

d) $O'=(-2,\ 1),\ A'=\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right),\ B'=\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right).$

Sol: a) Traslazione; b) Rotazione di $C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; c) Riflessione con $r:\ y=2x$; d) Glissoriflessione

Esercizio 2. Trovare le rette fisse della traslazione $(x',y')=(x-3,y+2)$.

Sol: $y=-\frac{2}{3}x+q\quad \forall q\in\mathbb{R}$

Esercizio 3. Trovare la retta fissa della glissoriflessione

$$\begin{cases} x'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2 \\ \\ y'=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+1 \end{cases}$$

Sol: $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}$

Esercizio 4. Determinare le equazioni della riflessione rispetto alla retta $y=2x$. Determinare inoltre in cosa viene trasformato il punto $P(3,0)$.

Sol: $P'=\left(-\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$

Esercizio 5. Determinare le equazioni della rotazione antioraria di $45°$ attorno al punto $C(1,1)$. Determinare inoltre in cosa viene trasformata la retta $y=3x-1$.

Sol: $r':\quad y'=-2x'+3-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 6. Determinare le equazioni della glissoriflessione data dalla composizione della riflessione rispetto alla retta $y=2x+1$ e della traslazione di vettore $\overrightarrow{v}(1,2)$. Determinare inoltre in cosa viene trasformata la parabola $y=x^2$.

Sol: nella parabola $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 34x - 87y + 121 = 0$

Affinità‘

Esercizio 7. Date le trasformazioni (affinità)

$$f: \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases} \qquad g: \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Determinare $f \circ g$, $g \circ f$ e $(g \circ f)^{-1}$

Sol: $f \circ g = (x, y) \to (-2y + 1,\ 2x + 2)$,
$g \circ f = (x, y) \to (-2y - 2,\ 2x - 1)$,
$(g \circ f)^{-1} = (x, y) \to \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}x - 1\right)$

Esercizio 8.

a) Scrivi le equazioni dell'omotetia di centro $C(1, -1)$ e rapporto $k = \dfrac{1}{4}$

b) Determina il centro dell'omotetia

$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$$

Sol: a) $(x, y) \to \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4},\ \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}\right)$; b) $C(1, -3)$

Esercizio 9. Un'omotetia con centro O trasforma il punto $A(2, -5)$ nel punto A' di ascissa -8. Trova le equazioni dell'omotetia e l'ordinata di A'.

Sol: $(x, y) \to (-4x, -4y)$

Esercizio 10. Trova per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni rappresentano una similitudine indiretta di rapporto $\sqrt{5}$

$$\begin{cases} x' = ax + y + a \\ y' = x - ay \end{cases}$$

Sol: $a = \pm 2$

Esercizio 11. Data l'affinità

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

verifica che si tratta di una similitudine, determina il suo rapporto k e indica se la similitudine è diretta o inversa.

Trova poi il trasformato del triangolo di vertici $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(-1, -4)$ e verifica le proprietà che riguardano perimetro ed area del triangolo trasformato.

Sol: similitudine indiretta con $k = \sqrt{2}$

Eseme di stato

Esercizio 12. **PNI 01/02, Q10, sessione ordinaria**. Spiegare con esempi appropriati la differenza tra *omotetie* e *similitudini* del piano.

Esercizio 13. **PNI 02/03, Q2, sessione supplettiva**. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono date le affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$$

dove $a,\ b$ sono parametri reali.

Dimostrare che tra esse vi è una similitudine diretta, e di questa trovare il punto unito.

Esercizio 14. **PNI 03/04, Q10, sessione ordinaria**. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}$$

Di quale traformazione si tratta?

Esercizio 15. **PNI 03/04, Q10, sessione straordinaria**. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni

$$\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ y = -x - y + m \end{cases}$$

dome m è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di m.

Esercizio 16. **PNI 03/04, Q8, sessione supplettiva**. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono date le affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = \dfrac{1}{2}bx - 2 \end{cases}$$

dove $a,\ b$ sono parametri reali.

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $P(1,0)$ nel punto $P(1,-1)$ e stabilire se ammette rette unite.

Esercizio 17. **PNI 04/05, Q3, sessione ordinaria**. Si determino le equazioni di due simmetrie assiali σ e ϕ la cui composizione $\sigma \circ \phi$ dia luogo alla traslazione di equazione

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso, $\phi \circ \sigma$.

Esercizio 18. **PNI 04/05, Q6, sessione ordinaria**. Le rette r e s di equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in un'omotettia σ di centro l'origine. Si determini σ.

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso, $\phi \circ \sigma$.

Esercizio 19. **PNI 04/05, Q10, sessione supplettiva**. Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni

$$x' = 2x + my - 1, \qquad y' = mx - 2y - 2$$

dove m è un parametro reale.

Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

Esercizio 20. **PNI 05/06, Q8, sessione supplettiva**. Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

Esercizio 21. **PNI 06/07, Q3, sessione ordinaria**. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.

Esercizio 22. **PNI 06/07, Q3, sessione supplettiva**. Si verifichi che la curva di equazione $y = x^3 + 3x^2 - 1$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

Esercizio 23. **PNI 07/08, Q10, sessione ordinaria**. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = \mathrm{e}^{-2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

Esercizio 24. **PNI 08/09, Q5, sessione supplettiva**. Nell'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapproto $k = -4$, si detrmini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

Esercizio 25. **PNI 09/10, Q5, sessione ordinaria**. Sia G il grafico di una funzione $x \to f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.

CAPITOLO 8

Schede di lavoro con GeoGebra

ESERCIZIO 1. **Traslazioni.**

Per traslare un oggetto di un vettore, bisogna prima definire l'oggetto ed il vettore. Consideriamo la retta $y = 2x$ e il vettore $v = (2; -3)$.

NOTA TECNICA PER LA COSTRUZIONE DI UN VETTORE.

I vettori possono essere definiti utilizzando le apposite opzioni dalla terza icona, oppure scrivendo $v = (2, -3)$ nella barra di inserimento. In questo caso notiamo che se il nome è una lettera maiuscola $A = (2, -3)$, GoeGebra considera un punto, mentre se è una lettera minuscola $a = (2, -3)$ considera il vettore con origine nell'origine degli assi cartesiani ed estremo il punto $(2, -3)$

Dalla terz'ultima icona, quella da utilizzare per tutte le trasformazioni, scegliamo l'opzione *trasla di un vettore* e disegnamo il grafico di f', traslazione della retta iniziale.

Ricava le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

e determina l'equazione della nuova funzione traslata. Verifica il risultato con quanto riportato nella finestra algebra di GeoGebra.

ESERCIZIO 2. Ripeti l'esericizio precedente con la funzione $f(x) = x^3 - x^2$ e il vettore $v = (3, 4)$.

ESERCIZIO 3. **Simmetrie assiali o riflessioni.**

Utilizzando la terzultima icona, data una funzione $f(x)$, puoi tracciare il grafico della funzione f', simmetrica ad f rispetto ad una qualsiasi retta.

Per esempio traccia il grafico di $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ e la retta $r:\ y = x$. Traccia quindi il grafico della funzione f' simmetrica ad f rispetto a r.

Ricava le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

e determina l'equazione della nuova funzione. Verifica il risultato con quanto riportato nella finestra algebra di GeoGebra.

Cosa puoi dire in questo caso particolare delle funzioni f e f'?

ESERCIZIO 4. Ripeti l'esercizio precedente con le seguenti funzioni e rette:

a) $f(x) = 3x + 5$ $\quad r:\ x = 3$

b) $f(x) = x^2 - 5$ $\quad r:\ y = -2$

ESERCIZIO 5. Notiamo che partendo da una funzione ed effettuando una simmetria, non è detto che si ottenga ancora una funzione. Per esempio cosa succede calcolando la simmetrica di $f(x) = x^2$ rispetto ad $y = x$? Qual è l'equazione dell'oggetto rappresentato?

ESERCIZIO 6. In alcuni casi GeoGebra non vede le funzioni come oggetti. Per esempio cercando di tracciare la simmetrica di $f(x) = x^4 - 2x + 1$ rispetto ad $r:\ y = 2x - 3$ il comando non effettua quanto desiderato. In questo ed in altri casi possiamo procedere nel seguente modo, determinando la simmetrica punto per punto:

- dopo avere tracciato i due grafici prendi un punto A su f.
- Traccia quindi il simmetrico A'di A rispetto a r.
- Facendo muovere A su f il punto A' segue il grafico della funzione f'. Scegliendo per A' l'opzione *traccia attiva* si ottiene un risultato apprezzabile.
- Scegliendo dalla quarta icona l'opzione *luogo* si ottiene il grafico.

In questo modo, però, non otteniamo alcuna informazione sull'equazione dell'oggetto tracciato.

Esercizio 7. Data una funzione $f(x)$, allora

- $f(x)$ è **pari** sse $f(-x) = f(x)$,
- $f(x)$ è **dispari** sse $f(-x) = -f(x)$,

In alternativa si può dare la seguente definizione Data una funzione $f(x)$, allora

- $f(x)$ è **pari** sse il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
- $f(x)$ è **dispari** sse il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'origine.

Stabilisci, con carta e penna utilizzando la prima definizione, se le seguenti funzioni sono pari o dispari

$$f_1(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-5}$$
$$f_2(x) = x^3 - 4x + 1$$
$$f_3(x) = x^3 - 5x$$
$$f_4(x) = \frac{x^3 - x}{x^2+1}$$
$$f_5(x) = \frac{x^3 - x}{x^3+2x}$$

Stabilisci poi con GeoGebra, utilizzando la costruzione del grafico simmetrico vista negli esercizi precedenti, se i risultati corrispondono in base alla seconda definizione.

Esercizio 8. Nella tabella seguente vengono descritti un triangolo e il suo trasformato tramite un'isometria del piano. La trasformazione utilizzata pu essere una traslazione, una rotazione, una simmetria assiale, una simmetria centrale, una glissosimmetria oppure può darsi che non esista alcuna isometria che trasforma il primo triangolo nel secondo.

Osservando le figure date, congetturate quale tipo di isometria è stata utilizzata e controllate se la vostra congettura è corretta con lausilio di GeoGebra.

Completate la scheda descrivendo le isometrie che avete trovato e specificandone le caratteristiche.

Attenzione: alcune coordinate sono state approssimate alla seconda cifra decimale; questo potrebbe portare a qualche imprecisione.

	A	B	C	A'	B'	C'
a)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(1;-4)	(-1; -7)	(-3;-3)
b)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(-5; 5)	(-3; 8)	(-1; 4)
c)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(5,8;1,6)	(2,4;2,8)	(3,2;-1,6)
d)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(-3;14)	(-1;11)	(2;15)
e)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(-4,87;3,23)	(-6,46; 6,46;)	(-2;6,2)
f)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(2,6;-0,8)	(3,8;2,6)	(-0,6;1, 8)

Esercizio	Tipo si trasformazione e sue caratteristiche principali
a)	
b)	
c)	
d)	
e)	
f)	

Esercizio 9. Costruisci con GeoGebra un triangolo isoscele di vertice $A(-1;0)$ e lato obliquo di lunghezza 3 (naturalmente se ne può costruire più di uno); indica con B e C gli estremi della base.

Spiega brevemente come hai effettuato la costruzione e scrivi le coordinate dei vertici B e C.

....

....

....

....

....

Sapendo che il punto A viene trasformato nel punto $A'(-5;4)$ tramite una simmetria centrale, trova le coordinate degli altri due vertici B' e C' del triangolo $A'B'C'$ trasformato di ABC tramite la simmetria centrale.

Esercizio 10. Costruisci con Geogebra un triangolo equilatero di vertice $A(2;1)$ e lato di lunghezza 2; indica con B e C gli altri vertici del triangolo.

Spiega brevemente come hai effettuato la costruzione e scrivi le coordinate dei vertici B e C.

....

....

....

....

....

Sapendo che il punto A viene trasformato nel punto $A'(6;-1)$ tramite una simmetria assiale, trova le coordinate degli altri due vertici B' e C' del triangolo $A'B'C'$ trasformato di ABC tramite la simmetria assiale.

Esercizio 11. Immagina che il semiasse positivo delle ascisse e il semiasse positivo delle ordinate siano due bordi di un tavolo da biliardo. Se la palla si trova in posizione $(1;3)$, verso quale direzione devo mandarla in modo che, facendo sponda sull'asse delle ascisse, colpisca una palla ferma in posizione $(5;2)$?

Suggerimento: il rimbalzo della palla sull'asse delle ascisse avviene in modo che le traiettorie della palla prima e dopo la sponda abbiano lo stesso angolo di rifrazione, ovvero siano simmetriche rispetto alla retta...

Scheda di lavoro 3. Composizione di isometrie

Nei prossimi esercizi vogliamo analizzare alcuni casi di composizione di isometrie. In particolare, dato il teorema delle tre riflessioni:

Teorema. Ogni isometria può essere ottenuta dalla composizione di una, due o tre riflessioni.

ci interesseremo delle composizioni in cui sono coinvolte le riflessioni.

Nei seguenti esercizi siano $A = (1, 2)$, $B(4, -1)$ e $C = (2, 4)$.

Per riuscire a trovare delle regole generali, in alcuni casi può essere conveniente cambiare i dati (gli assi di simmetria, il vettore di traslazione...) in modo da verificare di non essere incappati in un caso particolare.

Vediamo cosa succede componendo due riflessioni.

Esercizio 12. Vediamo cosa succede componendo due riflessioni di assi tra loro **paralleli**.

- Disegna il triangolo ABC e due rette r e s tra loro parallele, per esempio le rette $r: \ y = -2x - 2$ e $s: \ y = -2x + 1$.
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ simmetrico di $A'B'C'$ rispetto alla retta s.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	
Relazione tra le rette r e s e la trasformazione trovata	

Esercizio 13. Vediamo cosa succede componendo due riflessioni di assi tra loro **incidenti**.

- Disegna il triangolo ABC e due rette r e s tra loro non parallele, per esempio le rette $r: \ y = -2x - 2$ e $s: \ y = x + 4$.
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ simmetrico di $A'B'C'$ rispetto alla retta s.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	
Relazione tra le rette r e s e la trasformazione trovata	

Esercizio 14. Come caso particolare dell'esercizio precedente, vediamo cosa succede componendo due riflessioni di assi tra loro **perpendicolari**.

- Disegna il triangolo ABC e due rette r e s tra loro perpendicolari, per esempio le rette $r:\ y=-2x-2$ e $s:\ y=\dfrac{1}{2}x+4$.
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ simmetrico di $A'B'C'$ rispetto alla retta s.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	

Possiamo concludere che, componendo **due riflessioni** si hanno le seguenti possibilità:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

Vediamo ora cosa succede cosa componendo una riflessione con una traslazione o con una rotazione. Nei seguenti esercizi siano ancora $A = (1, 2)$, $B(4, -1)$ e $C = (2, 4)$.

Esercizio 15. Vediamo cosa succede componendo una riflessione con una traslazione (non parallela all'asse di simmetria).

- Disegna il triangolo ABC, la retta $r:\ y = -2x - 2$ e il vettore $v = (1, 5)$.
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ ottenuto traslando $A'B'C'$ del vettore v.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	
Relazione tra la retta r, il vettore v e la trasformazione trovata	

Esercizio 16. Vediamo cosa succede componendo una riflessione con una rotazione

- Disegna il triangolo ABC, la retta $r:\ y = -3x - 4$ e il centro di rotazione $H = (-1, 2)$
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ ottenuto ruotando $A'B'C'$ di un angolo di $\alpha = 45°$ rispetto al centro C.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	
Relazione tra la retta r, il punto H e la trasformazione trovata	

Possiamo concludere che, componendo una **riflessione** con una **traslazione** o con una **rotazione** si hanno le seguenti possibilità:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .